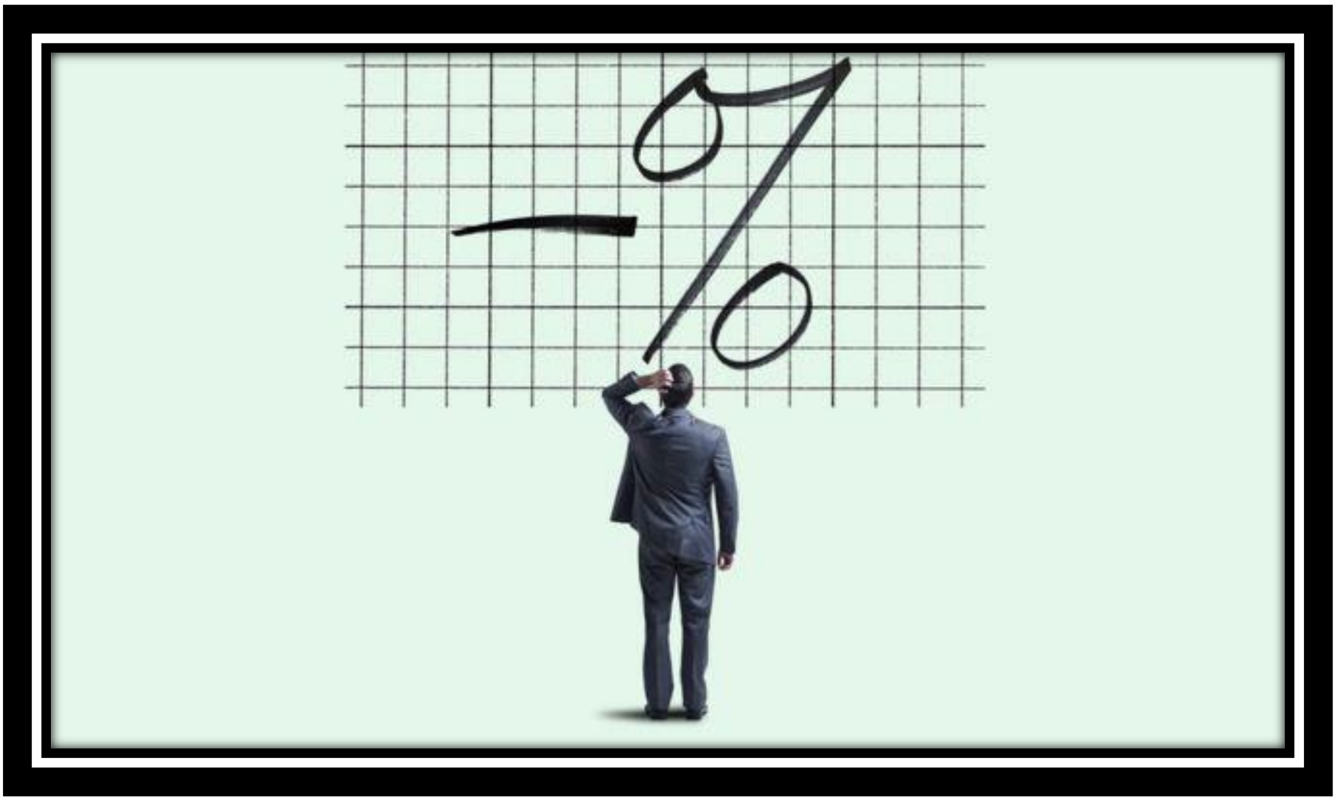
جامعة الكوفة /كلية التربية الاساسية

تحـليل عــددي

مدرس المادة : م.م رحاب رحيم كاظم



المقدمة

يستخدم التحليل العددي في حل المعادلات الرياضية التي يصعب حلها او التي يستلزم حلها وقت طويل لايجاد قيم تقريبية للمعادلات الرياضية

بعض المعادلات يمكن ايجاد الحل المضبوط لها بسهولة مثل $x^2+x-3=0$ او ايجاد قيمة التكامل $\int_0^1 x^2\,dx$ ولكن في الغالب ليس من السهل ايجاد الحلول المضبوطة لعديد من المسائل مثل المعادلات الجبرية ذات قوى غير صحيحة او بعض المعادلات الغير خطية مثل $x=\sin x$ او قيمة التكامل $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

وتكون القيم تقريبية والوسائل المستعملة لايجاد هذه الحلول تقريبيه تسمى بالخوارزميات والتي تكون مصممة لحل مسالة معينة تسمح لنا بايجاد الحل باي دقة وباستخدام عدد من محدد من الخطوات وهذه الحلول تسمى بالحلول العددية والطرق المستخدمة لايجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة فتسمى بالتحليل العددي

مصادر الاخطاء

ان الخطا الحاصل في الحل التقريبي لمسالة ما هو غالبا مايكون بسب تراكم عدة انواع من الاخطاء ويمكن تصنيف الاخطاء

١- اخطاء الصياغة (Formulation errors)

عندما يراد تحليل مشكلة معينة بطريقة رياضية ،غالبا ما نأخذ نموذج مبسط يصف المشكلة الاساسية اي قد نهمل بعض العوامل والمؤثرات اذا راينا بانها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لاياثر على المظهر الاساسي للمشكلة وتكون محملة بأخطاء الصياغة.

٢- اخطاء التدوير (Rounding errors)

ومن اهم مصادر الاخطاء هو استعمال الاعداد المدورة بدلا من المضبوطة حيث ان كثير من الاعداد تحوي على مراتب عشرية غير منتهية فعند تقريب هذه المراتب العشرية واستخدامها يؤدي الى خطا في النواتج

$$e=2.71828 \quad \rightarrow \quad e=2.7183$$

٣- اخطاء البتر (Truncation errors)

ان الكثير من الدوال الرياضية معرفة على شكل متسلسلة غير منتهية وحيث هذه المتسلسلات مستحيل لذلك وجب تحديد عدد حدود التسلسل وبهذا التحديد فان هناك خطا في الناتج

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

٤- اخطاء القطع (Chopping errors)

تنتج هذه الاخطاء عند بتر كود ذو مراتب عشرية عديدة الى عدد ذو مراتب عشرية اقل وبدون تدوير

$$\mathrm{e} = 2.71828 \quad \rightarrow \quad e = 2.7182$$

٥- اخطاء التراكم (Accumulated errors)

تتضمن بعض الطرق العددية كل المعضلات الرياضية تكرارا لمجموعة من العمليات الحسابية ولخطوات متعاقبة فاذا وجد خطا في احدى التكرارات فان الخطأ سيزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية

انواع الاخطاء

١- الخطا المطلق (Absolute error)

يعرف الخطا المطلق بانه حاصل طرح القيمة التقريبية من القيمة الحقيقية ويرمز له بالرمز e_x والصيغة العامة لهذا الخطا هو

$$e_x = |x - x^*|$$

٢- الخطا النسبي (Relative error)

يعرف الخطا النسبي بانه النسبة بين قيمة الخطا المطلق للعد e_x والقيمة الحقيقية ويرمز له بالرمز δ_x والصيغة العامة لهذا الخطا هي

$$\delta_x = |\frac{e_x}{x}|$$

مثال // لتكن 0.0007قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة 0.0008 اوجد الخطا المطلق والنسبي .

الحل // $x = 0.0008 \quad , x^* = 0.0007$

الخطا المطلق

$$e_x = |x - x^*| = |0.0008 - 0.0007| = |0.0001| = 0.0001$$

الخطا النسبي

$$\delta_x = \left|\frac{e_x}{x}\right| = \left|\frac{0.0001}{0.0008}\right| = 0.125$$

واجب // لتكن 9950 قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة 10000 اوجد الخطا المطلق والنسبي .

الاخطاء في العمليات الحسابية

لتكن x^* قيمة تعريفية لقيمة حقيقية للعدد مطلق e_x وخطا نسبي δ_x و y^* قيمة تقريبيه لقيمة حقيقية لعدد y وبخطا مطلق e_y وخطا نسبي δ_y فان انتشار الاخطاء على العمليات الحسابية يتم كما ياتي

اولا : الخطا المطلق

١- خطا عملية الجمع $|e_{x+y}| = |e_x + e_y|$

٢- خطا عملية الطرح $|e_{x-y}| = |e_x - e_y|$

٣- خطا عملية الضرب $|e_{xy}| = |\mathrm{x}e_y - ye_x|$

٤- خطا عملية القسمة $|e_{\frac{x}{y}}| = |\frac{x}{y}(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y})|$

اولا : الخطا النسبي

١- خطا عملية الجمع $|\delta_{x+y}| = \left|\frac{e_{x+y}}{x+y}\right|$

٢- خطا عملية الطرح $|\delta_{x-y}| = \left|\frac{e_{x-y}}{x-y}\right|$

٣- خطا عملية الضرب $|\delta_{xy}| = |\frac{e_{xy}}{xy}|$

٤- خطا عملية القسمة $|\delta_{\frac{x}{y}}| = |\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}|$

مثال 1// ليكن 5.20 , 2.57 عددين مدورين الى الرقم الاخير لكل منهما اوجد الخطأ المطلق والخطا النسبي في حاصل الجمع العددين .

الحل //

$$x = 2.57 \quad \rightarrow e_x = 0.005$$
$$y = 5.20 \quad \rightarrow e_y = 0.005$$

لان العددين مدورين

$$|e_{x+y}| = |e_x + e_y = 0.005 + 0.005 = 0.01|$$

$$|\delta_{x+y}| = \left|\frac{e_{x+y}}{x+y}\right| = \frac{0.01}{2.57 + 5.20} = 0.0012$$

مثال 2// ليكن 5.20 , 2.57 عددين مقطوعين اوجد الخطأ المطلق والخطا النسبي في حاصل ضرب العددين

الحل//

$$x = 2.57 \quad \rightarrow e_x = 0.009$$
$$y = 5.20 \quad \rightarrow e_y = 0.009$$

لان العددين قطوعين

$$|e_{xy}| = |\mathrm{x}e_y - ye_x| = |2.57(0.009) - 5.20(0.009)| = |-0.02367|$$
$$= 0.02367$$

$$|\delta_{xy}| = \left|\frac{e_{xy}}{xy}\right| = \left|\frac{0.02367}{2.57 * 5.20}\right| = 0.00177$$

واجب // ليكن 19.80, 2.57 عددين مقطوعين اوجد الخطأ المطلق والخطا النسبي في حاصل قسمة العددين