حيث $m=\frac{x-x_i}{h}$ و $h=x-x_i$

مثال// احسب القيمة التقريبية لـ $f(5.5)$ حيث ان $f(x)=x^2-1$ عند x=1,2,3,4,5,6

الحل//

x	$y=x^2$-1	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0			
		3		
2	3		2	
		5		0
3	8		2	
		7		0
4	15		2	
		9		0
5	24		2	
5.5		11		
6	35			

$$h=x-x_i=2-1=1 \text{ و } \quad m=\frac{x-x_i}{h}=\frac{5.5-5}{1}=0.5$$

$$f(x)=y_0+m\nabla y_0+\frac{m(m-1)}{2!}\nabla^2 y_0+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\nabla^3 y_0+..$$

$$f(5.5)=24+0.5(9)+\frac{0.5(0.5-1)}{2}=29.25$$

الواجب//

جد $f(1.1), f'(1.1), f''(1.1)$ من جدول القيم التالية

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8
y	0	0.1280	0.5440	1.2960	2.4320

صيغة نيوتن التراجعية للمشتقة Differential of Newton's- Backward formula

$$f(x) = y = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\nabla^3 y_0 + ..$$

$$y = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m^2 - m}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6}\nabla^3 y_0 + ..$$

$$y = y_0 + m\nabla y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}\right)\nabla^2 y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}\right)\nabla^3 y_0 + ..$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ m

$$\frac{dy}{dm} = \nabla y_0 + (m - \frac{1}{2})\nabla^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\nabla^3 y_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{3m^2}{4} + \frac{11m}{12} - \frac{1}{4}\right)\nabla^4 y_0 + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dm^2} = \nabla^2 y_0 + (m-1)\nabla^3 y_0 + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{3m}{2} + \frac{11}{12}\right)\nabla^4 y_0 + \cdots$$

حيث $m = \frac{x - x_i}{h}$ و $h = x - x_i$

مثال// جد $f'(5.4)$ لقيم الدالة $f(x) = x^3+2$ عند x=0,1,2,3,4,5,6

الحل//

x	$y=x^3+2$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	2				
		1			
1	3		6		
		7		6	
2	10		12		0
		19		6	
3	29		18		0
		37		6	
4	66		24		0
		61		6	
5	127		30		
5.4		91			
6	218				

$$h = x - x_i = 2 - 1 = 1 \text{ و } \quad m = \frac{x-x_i}{h} = \frac{5.4-5}{1} = 0.4$$

$$f'(x) = \nabla y_0 + (m - \frac{1}{2})\nabla^2 y_0 + (\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3})\nabla^3 y_0$$

$$f'(5.4) = 61 + (0.4 - 0.5)(24) + \left(\frac{(0.4)^2}{2} - 0.4 + \frac{1}{3}\right)(6) = 87.47$$

واجب // باستخدام الفروقات اوجد قيمة تقريبية لـ $f(7.5), f'(7.5), f''(7.5)$ اذا علمت ان

x	0	2	4	6	8
y	1	5	9	12	20

٣- الفروقات النسبية Divided Difference

درسنا سابقا الفروق المنتهية الاعتيادية والتي تعتمد على قيم الدالة في نقاط معلومة ومتساوية الابعاد (x_i) اما اذا كانت الابعاد بين النقاط المعلومة غير متساوية فان علينا

ايجاد نوع اخر من الفروقات الذي ياخذ بنظر الاعتبار التعبير غير المنتظم في قيم النقاط (x_i) ويسمى هذا التعبير بالفروقات النسبية ويرمز لمؤثره بـ (Δ).

ويعرف الفرق الاول

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \quad i = 0,1,2,\dots,n-1$$

$$i = 0 \rightarrow \Delta y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$i = 1 \rightarrow \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$i = n-1 \rightarrow \Delta y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

ويعرف الفرق الثاني

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1}-\Delta y_i}{x_{i+2}-x_i} \quad i = 0,1,2,\dots,n-2$$

$$i = 0 \rightarrow \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{x_2-x_0}$$

$$i = 1 \rightarrow \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$$

$$i = n-2 \rightarrow \Delta^2 y_{n-2} = \frac{\Delta y_n - \Delta y_{n-2}}{x_n - x_{n-2}}$$

ويعرف الفرق من الرتبة k

$$\Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1}-\Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k}-x_i} \quad i = 0,1,2,\dots,n-k$$