(6.1) خواص المرافق للعدد المعقد

(1) $z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = 0$

(2) $z.\overline{z} = x^2 + y^2$

(3) $z + \overline{z} = 2R(z)$

(4) $z - \overline{z} = 2iI(z)$

(5) $\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$

(6) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

(7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $, z_2 \neq 0$

Exercises (1)

جد ما يلي:

(1) $I\left(\frac{1}{1+i}\right)$

(2) $R((1+i)^2)$

(3) $R(i^{17})$

(4) $\frac{2-i}{1+2i}$

اثبت ما يلي:

(5) $\left(\overline{iz}\right) = -i\overline{z}$

(6) $\overline{z + 2i} = z - 2i$

(7) متى تتحقق المعادلة الاتية $\overline{z} = z$

(8) متى تتحقق المعادلة الاتية $\overline{z} = -z$

(9) جد حل المعادلة الاتية $x^2 + 1 = 0$

(10) جد قيمة x, y الحقيقيتين اللتين تحقق المعادلة الاتية $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$

(11) ضع العدد i^{99} بصيغة $x + iy$

(12) حلل العدد 50 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a + ib$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل تمارين (1)

(1) $I\left(\frac{1}{1+i}\right)$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$I\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) $R((1+i)^2)$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$R((1+i)^2) = 0$$

(3) $R(i^{17})$

$$i^{17} = (i^4)^4 i = i$$

$$R(i^{17}) = 0$$

(4) $\frac{2-i}{1+2i}$

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{2-i}{1+2i}\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = \frac{2-4i-i+2i^2}{1+4} = -i$$

اثبت ما يلي:

(5) $(\overline{iz}) = -i\bar{z}$

$$L.H.S = (\overline{iz}) = (\overline{iz}) = \bar{i}\,\bar{z} = -i\bar{z} = R.H.S$$

طريقة ثانية

$$L.H.S = \left(\overline{i(x+iy)}\right) = \left(\overline{-y+ix}\right) = -y - ix$$
$$= -i(x-iy) = -i\bar{z} = R.H.S$$

(6) $\overline{\bar{z}+2i} = z - 2i$

$$L.H.S = \overline{\bar{z}+2i} = \bar{\bar{z}} + \overline{2i} = z - 2i = R.H.S$$

طريقة ثانية

$$L.H.S=\left(\overline{\overline{(x+iy)}+2i}\right)=\left(\overline{x-iy+2i}\right)=\left(\overline{x-i(y-2)}\right)=x+i(y-2)$$
$$=x+iy-i2=z-2i=R.H.S$$

(7) متى تتحقق المعادلة الاتية $\overline{z}=z$

الحل: عندما يكون الجزء الخيالي من العدد المعقد مساو للصفر أي ان

$$z=x+0i\Rightarrow\overline{z}=x=z$$

(8) متى تتحقق المعادلة الاتية $\overline{z}=-z$

الحل: عندما يكون الجزء الحقيقي من العدد المعقد مساو للصفر أي ان

$$z=0+iy\Rightarrow\overline{z}=-iy=-z$$

(9) جد حل المعادلة الاتية $x^2+1=0$

الحل:

$$x^2+1=0\ \Rightarrow x^2-i^2=0$$
$$\Rightarrow(x+i)(x-i)=0\Rightarrow x=\pm i$$

(10) جد قيمة x,y الحقيقيتين اللتين تحقق المعادلة الاتية

$$y+5i=(2x+i)(x+2i)$$

الحل:

$$y+5i=(2x+i)(x+2i)$$
$$\Rightarrow y+5i=(2x^2-2)+(4ix+ix)$$
$$\Rightarrow y+5i=(2x^2-2)+5ix$$
$$\Rightarrow y+5i=(2x^2-2)+5ix$$

ملاحظة: إذا تساوي عددين معقدين فان الجزء الحقيقي للعدد الأول يساوي الجزء الخيالي للعدد الثاني وكذلك الجزء الخيالي للعدد الأول يساوي الجزء الخيالي للعدد الثاني.

$y = 2x^2 - 2 \qquad \dots \dots (1)$

$5x = 5$

$\Rightarrow x = 1 \qquad \dots \dots (2)$

$\Rightarrow y = 2(1)^2 - 2 = 0$

اذن

$$y = 0\,, x = 1$$

(11) اثبت ان

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)(1+i^4) = 8$$

الحل

$L.H.S = (1-i)(1-i^2)(1-i^3)(1+i^4)$

$= (1-i)(1+1)(1+i)(1+1)$

$= 4\,(1-i)(1+i)$

$= 4\,(1+1)$

$= 8 = R.H.S$

(12) ضع العدد i^{99} بصيغة $x+iy$

الحل

$i^{99} = (i^4)^{24}(i^2)(i) = (1)^{24}(-1)(i) = -i$

$\Rightarrow i^{99} = 0 - i$

(13) حلل العدد 50 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+ib$

الحل

$50 = 49 + 1 = 49 - i^2 = (7-i)(7+i)$

(7.1) الاعداد العقدية كحقل

ان الاعداد العقدية مع عملية الجمع والضرب $(\mathbb{C},+,.)$ تمثل حقلا يسمى حقل الاعداد العقدية ، حيث اذا كان $z_3 = x_3 + iy_3 \, , z_2 = x_2 + iy_2 \, \, , z_1 = x_1 + iy_1 \, , z = x + iy$ اعداد معقدة بحيث ان $x_3, y_3 \, , x_2, y_2, x_1, y_1, y, x \, \epsilon$ فأن الاعداد العقدية مع عملية الجمع والضرب تحقق الشروط الاتية

(1) الانغلاق

- **الجمع:** حاصل جمع عددين عقدين ينتج عدد عقدي أي ان

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) \, \epsilon \, \mathbb{R} \, , \, \, (y_1 + y_2) \, \epsilon \mathbb{R} \implies (z_1 + z_2) \, \epsilon \, \mathbb{C}$$

- **الضرب:** حاصل ضرب عددين عقدين ينتج عدد عقدي أي ان

$$z_1 . z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$
$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) \, \epsilon \, \mathbb{R} \, , \, \, (x_2 y_1 + x_1 y_2) \, \epsilon \mathbb{R}$$
$$\implies (z_1 . z_2) \, \epsilon \, \mathbb{C}$$

(2) خاصية الابدالية

- **الجمع:**

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$
$$= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1$$
$$\implies z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- **الضرب:**

$$z_1 . z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$
$$= x_2 x_1 - y_2 y_1 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1$$
$$= x_2 x_1 + iy_2 x_1 - y_2 y_1 + iy_1 x_2$$
$$= x_1 (x_2 + iy_2) + iy_1 (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_2 + iy_2)[x_1 + iy_1] = z_2 . z_1$$
$$\implies z_1 . z_2 = z_2 . z_1$$

(3) خاصية التجميعية

- **الجمع:** $\implies [z_1 + z_2] + z_3 = z_1 + [z_2 + z_3]$
- **الضرب:** $\implies [z_1 . z_2] . z_3 = z_1 . [z_2 . z_3]$

(4) العنصر المحايد

- المحايد الجمعي : $0 = (0 + 0i) \epsilon \mathbb{C}$ بحيث ان $z + 0 = z$

$$z + (0 + i0) = (x + iy) + (0 + 0i) = (x + 0) + (y + 0)i = z$$
$$\Rightarrow z + (0 + i0) = z$$

- المحايد الضربي : $1 = (1 + 0i)\ \epsilon\ \mathbb{C}$ بحيث ان $z.1 = z$

$$z.(1 + 0\,i) = (x + iy).(1 + 0i)$$
$$= (x - 0) + i(y + 0) = x + iy = z$$
$$\Rightarrow z.(1 + i0) = z$$

(5) النظير

- النظير الجمعي: لكل عنصر $z = x + iy\ \epsilon\ \mathbb{C}$ فأن يوجد $-z = -x - iy\ \epsilon\ \mathbb{C}$ بحيث ان $z + (-z) = 0$

$$z + (-z) = (x + iy) + (-x - iy)$$
$$= (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$$
$$\Rightarrow z + (-z) = 0 + 0i$$

- النظير الضربي: لكل عنصر $z\ \epsilon\ \mathbb{C}$ فأن يوجد z^{-1} بحيث ان $zz^{-1} = 1$

$$z.\left(\frac{1}{z}\right) = (x + iy).\frac{1}{x + iy} = \frac{x + iy}{x + iy}\left(\frac{x - iy}{x - iy}\right)$$
$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1 = 1 + 0i$$
$$\Rightarrow z.\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + 0i$$

(6) خاصية التوزيع الضرب على الجمع

$$z_1.[z_3 + z_2] = z_1.z_3 + z_1.z_2$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

Exercises (2)

1. حل المعادلات الاتية

$$(2-4i)+z=-5+i$$

2. جد النظير الضربي للاعداد ثم تحقق من الناتج

$$z_1=2-2i\ ,\ \ z_2=3+i$$

3. ضع كلا مما يأتي بالصورة $a+ib$

$$\frac{1+i}{1-i}\quad,\quad\frac{2-i}{3+4i}\ ,\qquad\sqrt{-100}$$