حل تمارين 2

1. حل المعادلات الاتية

$$(2-4i)+z=-5+i$$

الحل

$$\begin{aligned}
&(2-4i)+z=-5+i\\
&\Rightarrow (2-4i)+z+(-2-4i)=-5+i+(-2-4i)\\
&\Rightarrow z=-7-3i
\end{aligned}$$

2. جد النظير الضربي للاعداد ثم تحقق من الناتج

$$z=2-2i\ ,\quad \omega=3+i$$

الحل

$$\begin{aligned}
z^{-1}&=\frac{1}{z}=\frac{1}{2-2i}\left(\frac{2+2i}{2+2i}\right)\\
&=\frac{2+2i}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\\
\Rightarrow z.z^{-1}&=(2-2i).\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)i=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{-1}&=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{3+i}\left(\frac{3-i}{3-i}\right)\\
&=\frac{3-i}{10}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i\\
\Rightarrow \omega.\omega^{-1}&=(3+i).\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i\right)\\
&=\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{3}{10}-\frac{3}{10}\right)i\\
&=1
\end{aligned}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

3. ضع كلا مما يأتي بالصورة $a + ib$

$$\frac{1+i}{1-i} \quad , \quad \frac{2-i}{3+4i} \, , \qquad \sqrt{-100}$$

الحل

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\left(\frac{1+i}{1+i}\right)$$

$$= \frac{1+2i-1}{2} = i$$

$$\Longrightarrow \frac{1+i}{1-i} = 0 + i$$

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i}\left(\frac{3-4i}{3-4i}\right)$$

$$= \frac{6-4-3i-8i}{25} = \frac{2-11i}{25}$$

$$\Longrightarrow \frac{2-i}{3+4i} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

$$\sqrt{-100} = \sqrt{(100)(-1)}$$

$$= \sqrt{100}\,\sqrt{-1} = 10i$$

$$\Longrightarrow \sqrt{-100} = 0 + 10i$$

(8.1) القيمة المطلقة للعدد المعقد

القيمة المطلقة للعدد المعقد $z = x + iy$ ويرمز له بالرمز $|z|$ وتعرف بالشكل الاتي

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$$

حيث ان القيمة للعدد المعقد هو عدد حقيقي غير سالب.

مثال جد القيمة للعدد المعقد $z = 3 + 4i$

الحل:

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

(9.1) خواص القيمة المطلقة

(1) $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$

(2) $|z| = |\overline{z}|$

(3) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

(4) $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(5) $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) = y \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(6) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

(7) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

(8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ المتباينة المثلثية

برهان الخاصية (1):

$$L.H.S = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (1)$$
$$R.H.S = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد ان $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$.

برهان الخاصية (2):

$$let \quad z = x + iy \quad \Rightarrow \overline{z} = x - iy$$
$$L.H.S = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (1)$$
$$R.H.S = |\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد ان $|z| = |\overline{z}|$.

برهان الخاصية (6):

$$let\quad z = x + iy \quad \Longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$L.H.S = |z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2).\overline{(z_1\, z_2)}}$$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1).(z_2\bar{z}_2)}$$

$$= \sqrt{z_1\bar{z}_1}.\sqrt{z_2\bar{z}_2}$$

$$= |z_1|.|z_1| = R.H.S$$

برهان الخاصية (8):

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2).\overline{(z_1 + z_2)}$$ (حسب خاصية 1)

$$= (z_1 + z_2).(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

اذن نحصل على

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + z_2\bar{z}_2 \qquad \ldots(1)$$

$$let : \omega = z_1\bar{z}_2 \Longrightarrow \bar{\omega} = \overline{z_1\bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$$

$$\Longrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = \omega + \bar{\omega}$$

$$= 2R(\omega) \leq 2|\omega|$$

$$= 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$$

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \leq 2|z_1||z_2| \qquad \ldots(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1| + 2|z_1||z_2| + |z_2|$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

نأخذ جذر الطرفين لنحصل

$$|z_1 + z_2| \leq |z_2| + |z_2|$$

(10.1)الاعداد العقدية كفضاء متري

يعرف الفضاء المتري هو زوج مرتب (E,d) حيث E هي مجموعة اعداد والدالة dهي دالة للمسافة، والتي تعرف

$$d: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

حيث تتحقق الخصائص التالية مجتمعة بالنسبة لأي ثلاثة عناصر $z_1, z_2, z_3 \in E$

(1) $d(z_1, z_2) \geq 0$ دالة المسافة دالة غير سالبة

(2) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

(3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

(4) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ متراجحة المثلية

مبرهنة : زوج مرتب $(\mathbb{C}, |.|)$ مجموعة الاعداد المعقدة مع دالة القيمة المطلقة هو فضاء متري

البرهان: كل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ بحيث ان $z_3 = x_3 + iy_3$ $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ نعرف الدالة القيمة المطلقة $|.|: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq 0$

اذن $|z_1 - z_2| \geq 0$ وهي دالة غير سالبة

(2) $|z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \; and \; y_2 - y_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 \; and \; y_2 = y_1$$
$$\Leftrightarrow z_2 = z_1$$

(3) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

(من خواص القيمة المطلقة ، حيث المسافة من z_1 الى z_2 هي نفس المسافة من z_2 الى z_1)

(4) $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2 + z_2 - z_1|$ (نضيف ونطرح z_2)

$$= |(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)|$$
$$\leq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1|$$

اذن $|z_3 - z_1| \leq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1|$

اذن مجموعة الاعداد المعقدة $\mathbb{C}$ مع دالة القيمة المطلقة $|.|$هي فضاء متري.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

Exercises (3)

(1) جد القيمة المطلقة للاعداد الاتية

$$1-2i\,,i\ \ ,-3+i,$$

(2) احسب

$$\left|\frac{2-3i}{3-2i}\right| \quad , \quad |(1-i)^2|$$

(3) اثبت ان

$$|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$$

(4) اثبت ان:

$$\left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2 = [R(z)+I(z)]^2 + [R(z)-I(z)]^2$$

(5) اثبت ان الزوج المرتب $(\mathbb{C}:|.|)$ فضاء متري

حل تمارين 3

(1) جد القيمة المطلقة للاعداد الاتية $1-2i\,,i\quad,-3+i$

$$|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\,i| = \sqrt{0^2+(1)^2} = 1$$

$$|-3+i| = \sqrt{(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$$

(2) احسب

$$\left|\frac{2-3i}{3-2i}\right| = \left|\frac{2-3i}{3-2i}\left(\frac{3+2i}{3+2i}\right)\right| = \left|\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = 1$$

$$|(1-i)^2| = |-2i| = \sqrt{(0)^2+(-2)^2} = 2$$

(3) اثبت ان $\left|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)\right| = \sqrt{3}|2z+5\,|$

$$L.H.S = \left|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)\right| = |2\overline{z}+5\,||\sqrt{2}-i\,|$$
$$= \sqrt{2+1}|2(x-iy)+5\,|$$
$$= \sqrt{3}|2x+5-2iy\,|$$
$$= \sqrt{3}|2x+5+2iy\,| = \sqrt{3}|2z+5\,| = R.H.S$$

(4) اثبت ان: $\left(\sqrt{2}\,|z\,|\right)^2 = [R(z)+I(z)]^2+[R(z)-I(z)]^2$

$$L.H.S = \left(\sqrt{2}\,|z\,|\right)^2 = 2|x+iy|^2 = 2x^2+2y^2$$

نطرح من الطرفين $(|x|+|y|)^2$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2-(|x|+|y|)^2 = 2x^2+2y^2-(|x|+|y|)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2-(|x|+|y|)^2 = x^2-2xy+y^2 = (|x|-|y\,|)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2 = (|x|+|y|)^2+(|x|-|y\,|)^2 = R.H.S$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات