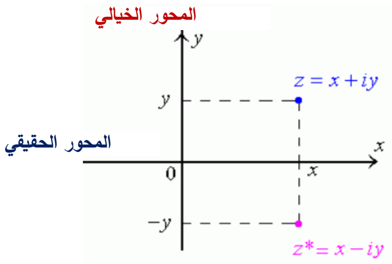
(11.1)التمثيل الهندسي للعدد المعقد

ان كل عدد معقد $z = x + iy$ يقابل نقطة احداثياتها (x , y) من المستوي xy وبالعكس (أي أن كل نقطة في المستوي xy تقابل عدداً معقداً)

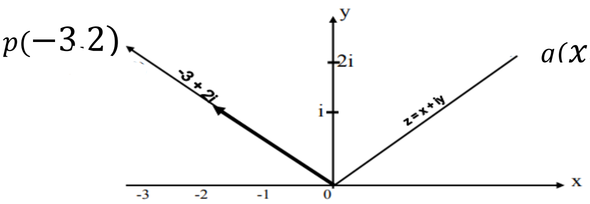


وكل عدد معقد z يمكن تمثيله بمتجه بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد وان طول هذا المتجهة هو القيمة المطلقة لذلك العدد (أي ان المسافة بين $(0،0)$ و $(x،y)$) كما يلي

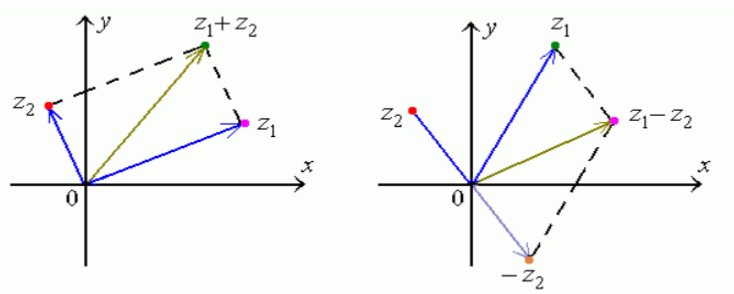
$$\sqrt{(\mathbf{0}-\boldsymbol{x})^2+(\mathbf{0}-\boldsymbol{y})^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}=|\boldsymbol{z}|$$

مثال ارسم العدد المعقد $z = -3 + 2i$

الحل: العدد $z = -3 + 2i$ يقابل النقطة $p(-3,2)$



اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن النقطة التي تقابل $z_1 + z_2$ هي النقطة التي احداثياتها $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ أن المسافة بين نقطتين ممثلتين بالعددين المعقدين z_1 ، z_2 هي



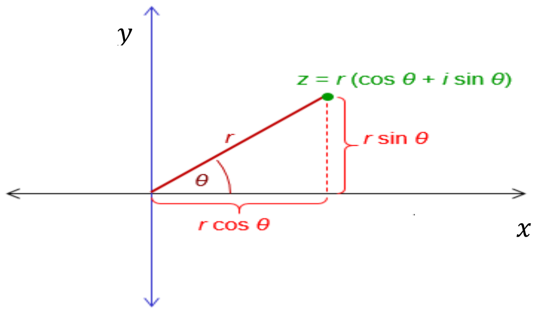
$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(12.1) الصيغة القطبية للعدد المعقد

لتكن (r,θ) تمثل الاحداثيات القطبية للنقطة p التي تقابل العدد المعقد $z = x + iy$ حيث

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \; , \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ان العدد المعقد $z = x + iy$ يمكن كتابته بالصيغة القطبية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



العدد الحقيقي r هو طول المتجهة الذي يمثل z أي $|z| = r$ وان العدد الحقيقي θ يسمى زاوية الاعتيادية العدد المعقد z ويرمز له $\theta = rag(z)$ ولكل θ عدد غير منتهي من القيم الحقيقية تختلف عن بعضها بالمضاعفات 2π.
واذا كانت الزاوية θ ضمن الفترة $(-\pi,\pi)$ تسمى الزاوية الأساسية له وتكتب $\theta = Aag(z)$ اين ان $\pi \leq Aag(z) \leq -\pi$ وبهذا يكون

$$arg(z) = Aag(z) + 2k\pi, \qquad k = 0 \pm 1, \pm, \ldots$$

ملاحظة: لايجاد قيمة زاوية العدد المعقد $arg(z)$ يجب معرفة الربع الذي تقع فيه.

1. اذا كانت في الربع الأول تبقى كما هي.

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{موجب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{موجب} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الاول}$$

2. اذا كانت في الربع الثاني تكون الوزاوية π − θ .

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{سالب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{موجب} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثاني}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

3. اذا كانت في الربع الثالث تكون الوزاوية $\pi + \theta$.

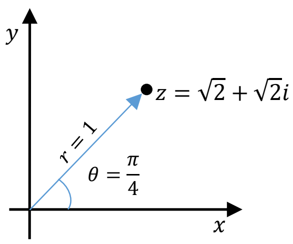
$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{سالب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{سالب} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{الربع الثالث}$$

4. اذا كانت في الربع الثالث تكون الوزاوية $2\pi - \theta$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{موجب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{سالب} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{الربع الرابع}$$

مثال اكتب العدد المعقد $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ بصيغة القطبية مع الرسم

الحل:



$$r^2 = x^2 + y^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

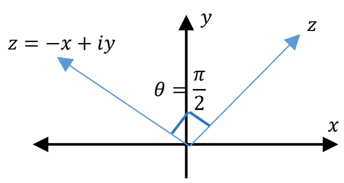
ملاحظة : من المتطابقات المهمه لزاوية الاعتيادية للعدد المعقد هي

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

ملاحظة: إذا ضرب العدد المعقد z بالعدد i فأن المتجهة العدد z يدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة لينطبق على المتجهة iz

البرهان



$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$iz = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\left[\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\right) + i\left(\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]$$

$$= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(13.1) إيجاد النظير الضربي للعدد المعقد باستخدام الإحداثيات القطبية

لإيجاد النظير الضربي بالإحداثيات القطبية نستخدم العلاقة الاتية $z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

البرهان:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta + i\sin^2\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

مثال جد النظير الضربي للعدد $z = 1 + i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

الحل:

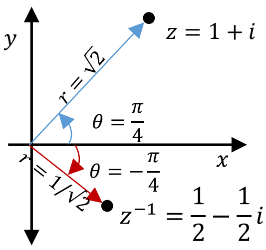
$$r = \sqrt{2}\,, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$



Exercises (4)

(1) اذا كان $z = 2 + 2i$ ارسم الاعداد المعقدة الاتية $z,\ -z\ ,\ \bar{z},\ |z|$

(2) اذا كان اذا كان $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ فجد: أرسم كلا من $z_1 + z_2$ ، $z_1 - z_2$ ثم احسب طول المتجهين.

(3) اكتب الاعداد المعقدة الاتية بصيغة القطبية مع الرسم

$$z = 1 + \sqrt{3}i\ , z = -1 + i\ , z = -1 - i\ , z = 2\sqrt{3} - 2i$$

(4) جد النظير الضربي للعدد $z = -1 - i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

(5) اثبت ان : $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

(6) اثبت ان : $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل تمارين 4

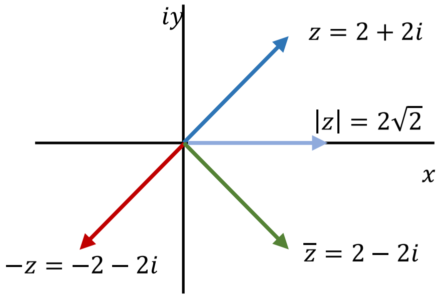
(1) اذا كان $z = 2 + 2i$ ارسم الاعداد المعقدة الاتية $z,\ -z\ ,\ \bar{z},\ |z|$

$z = 2 + 2i$

$-z = -2 - 2i$

$\bar{z} = 2 - 2i$

$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$



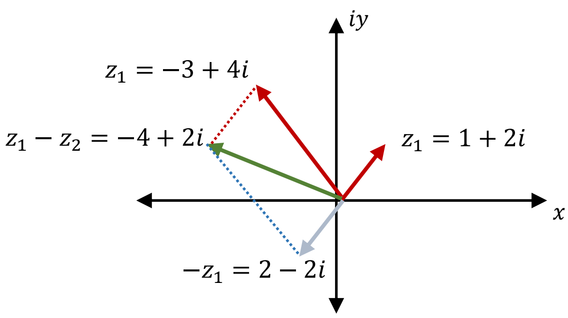
(2) اذا كان اذا كان $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ فجد: أرسم المتجهين $z_1 + z_2$ ، $z_1 - z_2$ ثم احسب اطوالهم.

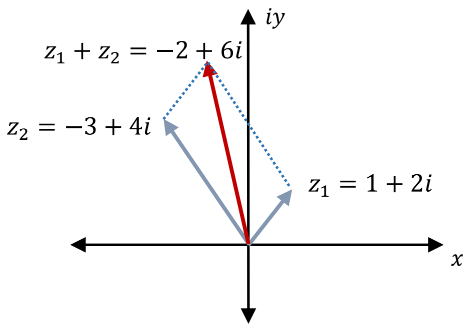
$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (-3 + 4i) = -2 + 6i$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \approx 6.3$

$z_1 - z_2 = (-3 + 4i) - (1 + 2i) = -4 + 2i$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.7$





(3) اكتب الاعداد المعقدة الاتية بصيغة القطبية مع الرسم

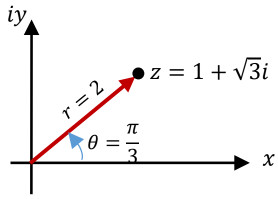
- $\boldsymbol{z = 1 + \sqrt{3}i}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{\mathbf{3}}\right)^2} = 2\ , \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الاول}$$

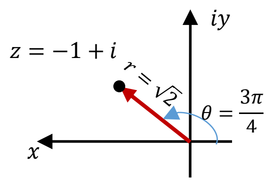
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



- $\boldsymbol{z = -1 + i}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثاني} \Longrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

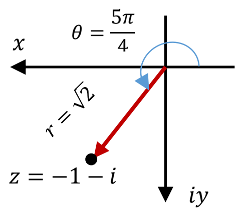


$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

- $\boldsymbol{z = -1 - i}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثالث} \Longrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

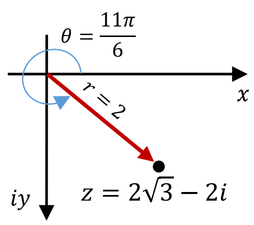


$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

- $\boldsymbol{z = 2\sqrt{3} - 2i}$

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4, \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الرابع} \Longrightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

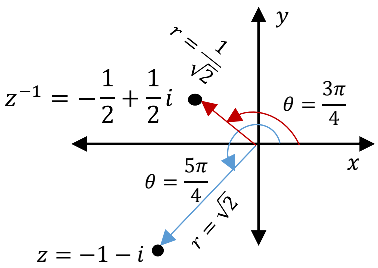


$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

(4) جد النظير الضربي للعدد $z = -1 - i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

$$r = \sqrt{2}\,,\ \theta = \frac{5\pi}{4}\quad ,z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

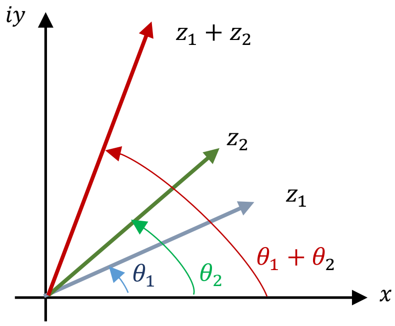


(5) اثبت ان:

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

البرهان

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad arg(z_1) = \theta_1$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),\quad arg(z_2) = \theta_2$$
$$\Longrightarrow z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)].[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$\Longrightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$
$$arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = arg(z_1) + arg(z_2)$$



أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات