مثال اثبت ان $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

الحل:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \Longrightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

(16.1) القوى للعدد المعقد

اذا كان $z = re^{i\theta}$ لا يساوي صفر فان القوى الصحيحة للعدد z تعطى بصيغة الاتية

$$\boldsymbol{z^n = r^n e^{in\theta}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

مثال اذا كان $z = re^{i\theta}$ عدد معقد وكان $r = 1$ اثبت ان

$$z^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

الحل:

$$z^3 = e^{3i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$ (صيغة دي موفري)

مثال احسب $(1+i)^8$

الحل:

$$r = \sqrt{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}i\right)}$$

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8 = 2^4 e^{2\pi i} = 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1+0) = 16$$

(17.1) الجذور للعدد المعقد

الجذر النوني لأي عدد معقد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ غير صفري هو العدد المعقد ω^n الذي يحقق المعادلة الاتية:

$$\omega^k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $\sqrt[n]{r}$ يمثل الجذر النوني للعدد الحقيقي r الذي يمثل طول العدد المعقد z، وان $k = 0,1,\dots,n-1$ والزاوية θ هي زاوية العدد المعقد . وان مجموعة كل الجذور النونية للعدد المعقد ω^n هي: $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$

مثال جد جذور $z^4 = 1$

الحل: $\left(re^{i\theta}\right)^4 = 1.e^{0i} \Rightarrow r^4e^{4i\theta} = 1.e^{0i},\ r^4 = 1 \Rightarrow r = 1,\ \theta = 0,$

Or $z = 1 \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

اذن $r = 1,\quad \theta = 0,\quad n = 4,\quad k = 0,1,2,3$

$$\omega^0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(0)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(0)\pi}{4}\right) = (\cos 0 + i\sin 0) = 1.$$

$$\omega^1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(1)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(1)\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$\omega^2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(2)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(2)\pi}{4}\right) = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$$

$$\omega^3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(3)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(3)\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

اذن جذور $z^4 = 1$ هي المجموعة $\{1, i, -1, -i\}$

Exercises (5)

(1) اثبت ان $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

(2) اذا كان $z = re^{i\theta}$ عدد معقد وكان $r = 1$ اثبت ان $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(3) احسب $(-1 + i)^6, (1 + i)^{-8}$

(4) جد جذور $z^4 = 2$ او احسب $(2)^{\frac{1}{4}}$

(5) احسب $(-1)^{\frac{1}{3}}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ مع الرسم

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل تمارين 5

(1) اثبت ان $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

الحل:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \Longrightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(2) اذا كان $z = re^{i\theta}$ عدد معقد وكان $r = 1$ اثبت ان $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

الحل:

$$L.H.S.: z^n = r^n e^{ni\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \left(\text{صيغة دي موفري}\right)$$

$$= R.H.S.$$

(3) احسب $(-1+i)^6, (1+i)^{-8}$

الحل:

$(1+i)^{-8}$

$$z = 1+i \quad , \quad r = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad 1+i = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}i\right)}$$

$$(1+i)^{-8} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{-8} = 2^{-4}e^{-2\pi i} = \frac{1}{16}(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi))$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = \frac{1}{16}(1-0) = \frac{1}{16}$$

$(-1+i)^6$

$$z = -1+i \quad , \quad r = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad , -1+i = \sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}i\right)}$$

$$(-1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 2^3 e^{-\frac{3}{2}\pi i} = 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 8(0 - i(-1)) = 8i$$

(4) جد الجذور لـ $z^4 = 2$ أو احسب $(2)^{\frac{1}{4}}$

الحل: $Z = 2 \Rightarrow z = 2 + 0i, r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right), \Longrightarrow \theta = 0$

or: $z = re^{i\theta} = 2.e^{0i} \Rightarrow r = 2 \;, \quad \theta = 0$

$r = 2, \quad \theta = 0, \quad n = 4, \quad k = 0,1,2,3$

$$\omega^n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$\omega^0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{0 + 2(0)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(0)\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[4]{2}(1 + 1) = \sqrt[4]{2}.$$

$$\omega^1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{0 + 2(1)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(1)\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}(0 + i) = \sqrt[4]{2}i$$

$$\omega^2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{0 + 2(2)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(2)\pi}{4}\right) = (\cos\pi + i\sin\pi) = \sqrt[4]{2}(-1 + 0) = -\sqrt[4]{2}$$

$$\omega^3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(3)\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2(3)\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}(0 - i) = -\sqrt[4]{2}i$$

اذن جذور $z^4 = 2$ هي المجموعة $\{\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i\}$

(5) احسب $(-1)^{\frac{1}{3}}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ مع الرسم

الحل: $(-1)^{\frac{1}{3}} =$

$z = re^{i\theta}, \qquad r = \sqrt{-1^2 + 0} = 1 \,, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(0) \,, \theta = \pi$ (لماذا ؟)

(موجب $\sin\theta = \frac{y}{r} = 0$, سالب $\cos\theta = \frac{x}{r} = -1$) ⇐ الربع الثاني او من الرسم(-1)ممكن نحدد موقع العدد

$r = 1, \quad \theta = \pi, \quad n = 3, \quad k = 0,1,2$

$$\omega^0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2(0)\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2(1)\pi}{3}\right) = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1 + 0i = -1$$

$$\omega^2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2(2)\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذن جذور $z^3 = -1$ هي المجموعة $\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

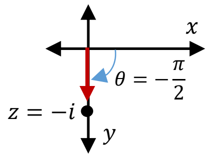
أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

$(-i)^{\frac{1}{3}} =$

$z = re^{i\theta}, \qquad r = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1\,, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right) =$ كمية معرفة $\qquad$ (لماذا ؟)

$\left(\right.$سالب $\sin\theta = \frac{y}{r} = -1\,,$ موجب $\cos\theta = \frac{x}{r} = 0\left.\right) \Leftarrow$ الربع الثالث من الرسم او ممكن نحدد موقع العدد $(-i)$

$r = 1, \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}, \qquad n = 3, \qquad k = 0,1,2$



$$\omega^0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\pi/2 + 2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2(0)\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega^1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i$$

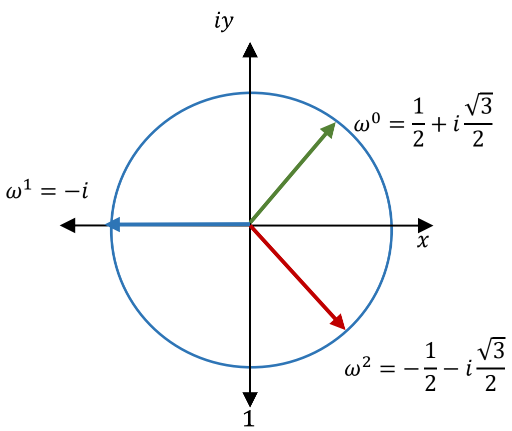
$$\omega^2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

اذن جذور $z^3 = -i$ هي المجموعة $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,,\ i\ ,-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,\}$

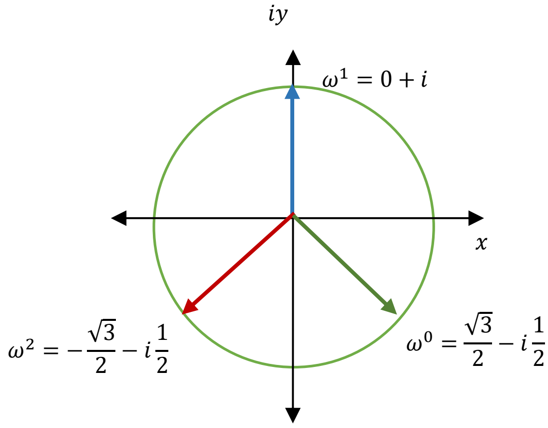
ملاحظة

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{6} = (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\pi = (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(-1) = -\frac{1}{2}$$



$(-i)^{\frac{1}{3}}$



$(-1)^{\frac{1}{3}}$

الفصل الثاني

الدوال التحليلية

(1.2) المتغير المعقد

اذا كانت D مجموعة من النقاط غير خالية، وكان z يرمز لأي عدد من المجموعة الاعداد المعقدة المقابلة للمجموعة D ، فأن z يسمى متغير معقدا وتسمى D منطقة تغييره.

(2.2) الدوال المعقدة

لتكن D و R مجموعتان غير خاليتان من النقاط في المستوي المعقد , يقال f الدالة معرفة من D الى R اذا كانت لكل z في D عددا ، يوجد w في R بحيث $f(z) = w$ ، تسمى المجموعة D المجال (المنطلق) للدالة و المجموعة R المستقر (المدى) للدالة .

مثال جد المجال (المنطلق) للدالة الاتية $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$

الحل: $D_f = \{z: z\epsilon\mathbb{C}, z \neq 2i\}$

ملاحظة: يمكن كتابة الدالة $f(z) = w$ بشكل الاتي

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

حيث $u(x,y)$ يمثل الجزء الحقيقي للدالة f و حيث $v(x,y)$ يمثل الجزء ال الخيالي للدالة f أي ان

$$R(w) = u(x,y), \qquad I(w) = v(x,y)$$

مثال اكتب الدالة الاتية $w = z^2$ بصيغة $w = u + iv$ ثم حدد الجزء الحقيقي والخيالي للدالة

الحل:

$let\ \ \mathrm{z} = x + iy$

$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

$R(w) = u(x,y) = x^2 - y^2,$

$I(w) = v(x,y) = 2ixy$

(3.2) دالة وحيدة القيمة

تكون الدالة وحيد القيمة اذا كان لكل $z\epsilon D$ تقابله قيمة واحدة فقط w في R بحيث ان $f(z) = w$

مثال على دالة وحيد القيمة $w = z^2 + z + 1$

(4.2) دالة متعددة القيم

تسمى الدالة $f(z) = w$ متعدد القيم اذا كان لكل $z\epsilon D$ تقابله اكثر من قيمة واحدة في R من الدالة $f(z)$

مثال هل ان الدالة الاتية متعددة القيم $w = z^{\frac{1}{3}}$

الحل: دالة $w = z^{\frac{1}{3}}$ متعدد القيم حيث لكل z تقابله ثلاث قيم من قيم الدالة w لان

$$w = z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0,1,2$$

(5.2) الدالة المتباينة

لتكن $w = f(z)$ دالة منطلقها D يقال ان الدالة متباينة اذا وفقط اذا كان لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فأن

$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

(6.2) الدالة العكسية

لتكن f دالة منطلقها D ومداها R فأن الدالة العكسية للدالة f (ويرمز لها f^{-1}) هي دالة منطلقها R ومداها D لكل $w \in R$ فأن يوجد $z \in D$ بحيث $w = f(z)$

ولحساب الدالة العكسية للدالة f نجد z بدلالة w أي ان $z = f^{-1}(w)$ ثم نعيد كتابتها بالصيغة الاتية $w = f^{-1}(z)$

مثال جد معكوس الدالة $f(z) = \frac{2}{z+1}$ حيث ان $z \neq 1$

الحل:

$$w = \frac{2}{z+1} \Rightarrow w(1+z) = 2 \Rightarrow w + wz = \frac{2-w}{w} \Rightarrow z = \frac{2}{w} - 1$$

ويمكن كتابتها بالصيغة $w = f^{-1}(z) = \frac{2}{z} - 1$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(7.2) الدالة المركبة

لتكن الدالة $f: B \longrightarrow C$ و $g: A \rightarrow B$ دوال فان f تركيب g ويرمز له fog تعرف على انها دالة $fog: A \longrightarrow c$ وتعرف كالتالي

$$(fog)(z) = f\big(g(z)\big), \qquad \forall\, z \in A$$

ملاحظة: $fog \neq gof$

مثال اذا كان $f(z) = z^2$ حيث ان $g(z) = z + 1$ جد: $fog\,, gof$

الحل:

$$(fog)\,(z) = f\big(g(z)\big) = (z+1)^2$$
$$(gof) = g\big(f(z)\big) = z^2 + 1$$

(8.2) الغايات

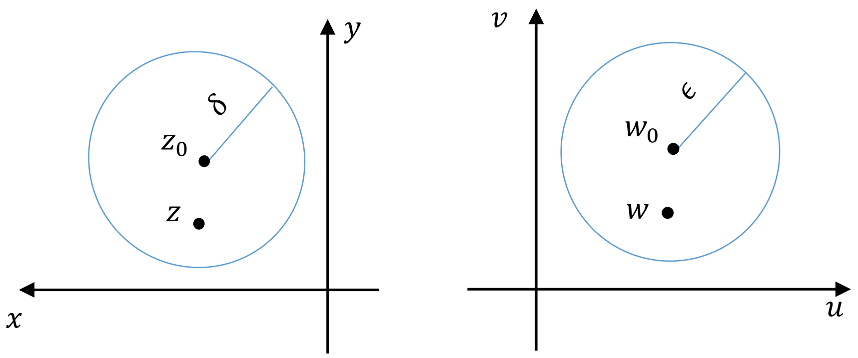
يقال للدالة $f(z) = w$ المعرفة بجوار النقطة z_0 لها غاية مثل w_0 عندما تقترب z من z_0 وتكتب

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0\,, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \epsilon$$

وهذ يعني انه ان قيمة الدالة $f(z) = w$ تصبح قريبة من w_0 عندما z قريبه جدا من z_0.



الشكل يوضح مفهوم الاقتراب أي ان العناصر التي تقع في دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها δ في المستوي xy فانه جميع الصور لهذه العناصر تقع في دائرة أخرى مركزها w_0 و نصف قطرها ϵ في المستوي uv .