### (7.2) الدالة المركبة

لتكن الدالة $f: B \longrightarrow C$ و $g: A \rightarrow B$ دوال فان $f$ تركيب $g$ ويرمز له $fog$ تعرف على انها دالة $fog: A \longrightarrow c$ وتعرف كالتالي

$$(fog)(z) = f\big(g(z)\big), \qquad \forall\, z \in A$$

ملاحظة: $fog \;\neq gof$

**مثال** اذا كان $f(z) = z^2$ حيث ان $g(z) = z + 1$ جد: $fog\,, gof$

**الحل:**

$$(fog)\,(z) = f\big(g(z)\big) = (z+1)^2$$
$$(gof) = g\big(f(z)\big) = z^2 + 1$$

### (8.2) الغايات

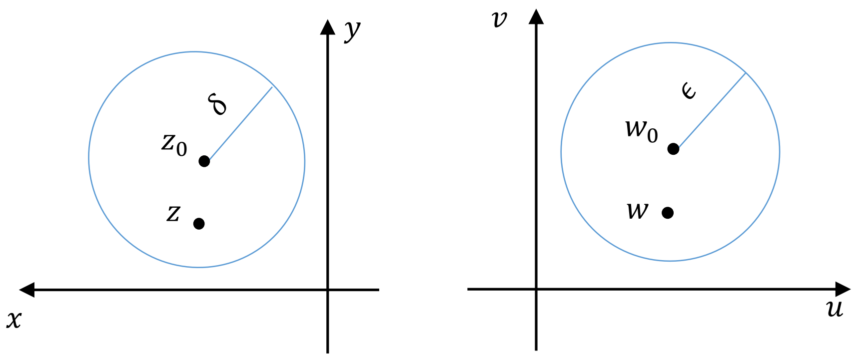
يقال للدالة $f(z) = w$ المعرفة بجوار النقطة $z_0$ لها غاية مثل $w_0$ عندما تقترب $z$ من $z_0$ وتكتب

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0\;, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \epsilon$$

وهذ يعني انه ان قيمة الدالة $f(z) = w$ تصبح قريبة من $w_0$ عندما $z$ قريبه جدا من $z_0$.




الشكل يوضح مفهوم الاقتراب أي ان العناصر التي تقع في دائرة مركزها $z_0$ ونصف قطرها $\delta$ في المستوي $xy$ فانه جميع الصور لهذه العناصر تقع في دائرة أخرى مركزها $w_0$ و نصف قطرها $\epsilon$ في المستوي $uv$ .

**ملاحظات**

- من تعريف الغاية يجب ان تكون الدلة معرفة علة جميع النقاط جوار النقطة $z_0$
- لم يشترط الاتجاه التي تقترب به $z_0$ من $z$.
- يمكن توسيع التعريف الغاية ليشمل الحالة التي يكون فيها $z_0$ نقطة محيطية لمنطلق الدالة وذلك بأن تحقق المتباينة الاولى من التعريف التي تقع في منطلق الدالة وتحقق المتباينة $|z - z_0| \leq \delta$ .

**مثال** اثبت ان $\lim_{z \to 2i-1} (2z + 3) = 4i + 1$

**الحل:** نفرض ان $\epsilon > 0$ بحيث ان $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|z - (2i - 1)| < \delta$

$$
\begin{aligned}
& |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \\
& \Rightarrow |(2z + 3) - (4i - 1)| < \epsilon \\
& \Rightarrow |2z - 4i + 2| < \epsilon\,, \\
& \Rightarrow |2||z - (2i - 1)| < \epsilon\,, \qquad (|2| = 2\ ) \\
& \Rightarrow |z - (2i - 1)| < \frac{\epsilon}{2}\,,, \qquad (\text{نقسم على } 2\ ) \\
& Let\ \delta = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |z - (2i - 1)| < \delta
\end{aligned}
$$

اذن $\lim_{z \to 2i-1} (2z + 3) = 4i + 1$

**مبرهنة :** ليكن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ و $w_0 = u_0 + iv_0$ فأن $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ اذا فقط اذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} u(x, y) = u_0 \quad , \qquad \lim_{y \to y_0} v(x, y) = v_0$$

**مبرهنة :** ليكن $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ و $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ فأن

- $\lim_{z \to z_0} [f(z) \mp g(z)] = A \mp B$
- $\lim_{z \to z_0} [f(z).g(z)] = A.B$
- $\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{A}{B}, B \neq 0$
- $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |A|$

**مثال:** اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة

**الحل:** نفرض ان $z = x + iy$ فأن $\bar{z} = x - iy$

الان عندما يقترب $z$ من $0$ من الحور الحقيقي فأن $y = 0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{x}{x} = 1 = L_1$$

وعندما يقترب $z$ من $0$ من الحور الخيالي فأن $x = 0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1 = L_2$$

$$\Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة

## Exercises (6)

1. اذا كان $w = f(z) = z^2 + 1$ فجد كلا من يأتي

$f(-2+i)\,,\qquad f(1-3i)\,,\qquad f(i)$

2. جد المجال (المنطلق) للدوال الاتية

**a.** $w = \frac{1}{z}$ **b.** $w = \frac{z-1}{z+1}$ **c.** $w = \frac{1}{z^2+1}$

**d.** $w = \frac{z}{z+\bar{z}}$ **e.** $w = \frac{z}{z-\bar{z}}$ **f.** $w = \frac{1}{1-|z|}$

3. اكتب الدوال الاتية بصيغة $w = u(x,y) + iv(x,y)$

**a.** $w = z^3$

**b.** $w = \frac{1}{z^2}$

**c.** $w = 2\left(e^{i\theta}\right)^{10}$

4. اثبت ان $\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

5. اثبت ان $\lim_{z\to 1} 2iz = 2i$

6. اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{|z|}$ غير موجودة



أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

## حل تمارين 6

1. اذا كان $w = f(z) = z^2 + 1$ فجد كلا من يأتي

$$f(-2+i)\,, \qquad f(1-3i)\,, \qquad f(i)$$

$$f(-2+i) = (-2+i)^2 + 1 = 4 - 4i - 1 + 1 = 4 - 4i$$

$$f(1-3i) = (1-3i)^2 + 1 = 1 - 6i - 9 + 1 = -7 - 9i$$

$$f(i) = i^2 + 1 = 0$$

2. جد المجال (المنطلق) للدوال الاتية

**a.** $w = \frac{1}{z}\,, \qquad D_w = \mathbb{C}/\{0\}$

**b.** $w = \frac{z-1}{z+1}, \quad D_w = \{z \epsilon \mathbb{C}, z \neq -i^{4n}, n = 1,2,3,..\}$

**c.** $w = \frac{1}{z^2+1}, \quad D_w = \{z \epsilon \mathbb{C}, z \neq i^{2(1+2n)}, n = 0,1,2,\ldots\}$

**d.** $w = \frac{z}{z+\bar{z}}, \quad D_w = \{z \epsilon \mathbb{C}, z \neq 0 \,\&\, R(z) \neq 0\}$

**e.** $w = \frac{z}{z-\bar{z}}, \quad D_w = \{z \epsilon \mathbb{C}, z \neq 0 \,\&\, I(z) \neq 0\}$

**f.** $w = \frac{1}{1-|z|}, \quad D_w = \mathbb{C}/\{-1,1,-i,i\}$

3. اكتب الدوال الاتية بصيغة $w = u(x,y) + iv(x,y)$

**a.** $w = z^3$

$$w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y)$$

**b.** $w = \frac{1}{z^2}$

$$w = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy}\,\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 - y^2 - 2ixy}$$
$$= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} - i\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2}$$

**c.** $w = 2\left(e^{i\theta}\right)^{10}$

$$w = 2e^{10i\theta} = 2\cos(10\theta) + 2i\sin(10\theta)$$



أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

4. اثبت ان $\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2}=\frac{i}{2}$

**الحل:** نفرض ان $\epsilon>0$ بحيث ان $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$

اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta>0$ بحيث ان $|z-1|<\delta$

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon \Rightarrow \left|\frac{iz}{2}-\frac{i}{2}\right|<\epsilon$$
$$\Rightarrow \left|\frac{i(z-1)}{2}\right|<\epsilon,$$
$$\Rightarrow \frac{|i||z-1|}{|2|}<\epsilon \quad , \quad (\text{السبب } |i|=1\ (|2|=2),)$$
$$\Rightarrow |z-1|<2\epsilon, \qquad (\text{نضرب في } 2)$$
$$Let\ \delta=2\epsilon \Rightarrow |z-1|<\delta \Rightarrow \lim_{z\to 1}\frac{iz}{2}=\frac{i}{2}$$

5. اثبت ان $\lim_{z\to 1} 2iz=2i$

**الحل:** نفرض ان $\epsilon>0$ بحيث ان $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$ اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta>0$ بحيث ان $|z-1|<\delta$

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon \Rightarrow |2iz-(2i)|<\epsilon$$
$$\Rightarrow |2i||z-1|<\epsilon$$
$$\Rightarrow 2|z-1|<\epsilon \quad , \quad (\text{السبب } |2i|=2)$$
$$\Rightarrow |z-1|<\frac{\epsilon}{2} \quad , \quad (\text{نقسم على } 2)$$
$$Let\ \delta=\frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |z-1|<\delta \Rightarrow \lim_{z\to 1} 2iz=2i$$

6. اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{|z|}$ غير موجودة

**الحل:** نفرض ان $z=x+iy$ فأن $\bar{z}=x-iy$

الان عندما يقترب $z$ من $0$ من الحور $x$ فأن $y=0$ فأن $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{|z|}=\lim_{z\to 0}\frac{x}{x}=1=L_1$

وعندما يقترب $z$ من $0$ من الحور $y$ فأن $x=0$ فأن $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{|z|}=\lim_{z\to 0}\frac{-iy}{iy}=-1=L_2$

اذن الغاية غير موجودة $\Longrightarrow L_1\neq L_2$

## (9.2) الاستمرارية

تكون $f$ الدالة مستمرة عند النقطة $z_0$ في $D$ اذا حققت الشروط الاتية

(1) $f(z_0)$ موجودة

(2) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة

(3) $f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$

أي ان تكون الدالة $f(z)=w$ المعرفة بجوار النقطة $z_0$ انها مستمرة في النقطة $z_0$ اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث ان $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$ عندما $|z-z_0|<\delta$

**مبرهنة** : إذا كانت الدالتان $f(z)$ و $g(z)$ مستمرتين عند النقطة $z_0$ فأن

- $f(z)\mp g(z) \Longrightarrow$ مستمرة عند النقطة $z_0$
- $f(z).g(z) \Longrightarrow$ مستمرة عند النقطة $z_0$
- $\frac{f(z)}{g(z)} \Longrightarrow$ مستمرة عند النقطة $z_0$ بشرط $g(z)\neq 0$

**مثال** هل الدالة الاتية $f(z)=\frac{iz}{2}$ مستمرة عند النقطة $z_0=1$

**الحل:**

$$f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2}=\frac{i}{2}$$

اذن الدالة مستمرة عند النقطة $z=1$.

**مثال** هل الدالة الاتية $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$ مستمرة عند النقطة $z_0=2i$

**الحل:**

$$f(2i)=\frac{1}{(2i)^2+4} \Longrightarrow \text{غير موجودة (لماذا؟)}$$

اذن الدالة غير مستمرة عند النقطة $2i$

## (10.2) المشتقة

لتكن $f$ دالة منطلق تعريفها يحوي جوار النقطة $z_0$ ، فأن المشتقة عند النقطة $z_0$ تعرف بالشكل الاتي

$$f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

او

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \qquad \Delta z = z - z_0$$

**مثال** اذا كانت $f(z) = z^2$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $1+i$

**الحل:**

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{z^2 + 2z(\Delta z) + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta z(2z+\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} (2z+\Delta z) = 2z$$

$$f'(1+i) = 2+2i$$

**مثال** اذا كانت $f(z) = \bar{z}$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z=0$

**الحل:**

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{(\Delta z)}}{\Delta z}$$

وباعتبار ان $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، ينتج

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

**الان** عندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الحقيقي نحصل على $0 = \Delta y$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = L_1$$

وعندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الخيالي نحصل على $0 = \Delta x$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1 = L_2$$

$$\Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن المشتقة غير موجودة

## (11.2) قواعد الاشتقاق

(1) $\frac{d}{dz}(k) = 0$ , $k$ ثابت

(2) $\frac{d}{dz}\left(k\, f(z)\right) = kf'(z)$

(3) $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

(4) $\frac{d}{dz}[\, f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$

(5) $\frac{d}{dz}[\, f(z).\, g(z)] = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

(6) $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{[g(z)]^2}$

**مثال** اذا كانت $f(z) = 3z^2 + 2z + 4$ جد $f'(1-i)$

**الحل:**

$$f'(z) = 6z + 2$$

$$\Rightarrow f'(1-i) = 6 - 6i + 2 = 4 + 6i$$