(12.2) علاقة المشتقة بالاستمرارية

مبرهنة : كل دالة f قابلة لاشتقاق عند النقطة z_0 تكون تلك الدالة مستمرة عند تلك النقطة.

البرهان : بما ان الدالة f قابلة لاشتقاق عند النقطة z_0 اذن $f(z_0)$ موجودة. الان

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)] = \lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]\frac{\Delta z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\left[\left(\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right)(\Delta z)\right]$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.\lim_{\Delta z\to 0}(\Delta z)$$

$$= f'(z).0$$

$$= 0$$

اذن نحصل على

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z) = f(z)$$

أي ان $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z)$ اذن الدالة مستمرة عند z_0.

عكس المبرهنة ليس دائما صحيح أي ان كل دالة مستمرة عند نقطة معينة ليس بضرورة تكون قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة ، مثال على ذلك $f(z)=\bar{z}$ دالة مستمرة عند جميع نقاط المستوي المعقد ولكن غير قابلة لاشتقاق عند $I(z)\neq 0$.

Exercises (7)

1. جد النقاط التي تكون فيها الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ غير مستمرة

2. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=i$

$$f(z)=\begin{cases}1+i\,, & z=i\\ \dfrac{1}{1-z}, & z\neq i\end{cases}$$

3. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=0$

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{\bar{z}}{z}, & z\neq 0\end{cases}$$

4. اذا كانت $f(z)=z^3$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $(-i)$

5. اذا كانت $f(z)=|z|^2$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z=0$

6. اذكر مثال على دالة مستمرة عند نقطة معينة وغير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

حل التمارين 7

1. جد النقاط التي تكون فيها الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ غير مستمرة

الحل: تكون الدالة غير مستمرة عندما تكون غير موجودة أي عندما يكون المقام يساوي صفر اذن

$$z^2+1=0 \Longrightarrow z^2=-1 \Longrightarrow z=\pm i$$

اذن النقاط تكون فيها فغير مستمرة هي $\{-i,i\}$

2. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=i$

$$f(z)=\begin{cases} 1+i\,, & z=i \\ \dfrac{2}{1-z}, & z\neq i \end{cases}$$

الحل:

(1) $f(i)=1+i$

(2) $\lim\limits_{z\to i}\frac{2}{1-z}=\frac{2}{1-i}=\frac{2}{1-i}\frac{1+i}{1+i}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$

(3) $f(i)=\lim\limits_{z\to i}f(z)=1+i$

اذن الدالة مستمرة عند $z=i$

3. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=0$

$$f(z)=\begin{cases} 0, & z=0 \\ \dfrac{\bar{z}}{z}, & z\neq 0 \end{cases}$$

الحل:

(1) $f(0)=0$

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$

الان عندما يقترب z من 0 من الحور الحقيقي فأن $y=0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{x}{x}=1=L_1$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

وعندما يقترب z من 0 من الحور الخيالي فأن $x = 0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1 = L_2$$

$$\Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة ، اذن الدالة غير مستمرة عند $z = 0$

4. اذا كانت $f(z) = z^3$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $(-i)$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^3 + 3z^2(\Delta z) + 3z(\Delta z)^2) + (\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z[3z^2 + 3z(\Delta z) + (\Delta z)^2]}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}(3z^2 + 3z(\Delta z) + (\Delta z)^2) = 3z$$

$$f'(-i) = -3i$$

5. اذا كانت $f(z) = |z|^2$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z = 0$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\overline{(z)}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\,\overline{(z)} + z\,\overline{(\Delta z)} + (\Delta z)\overline{(z)} + (\Delta z)\overline{(\Delta z)} - z\overline{(z)}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\,\overline{(\Delta z)}}{\Delta z} + \overline{(z)} + \overline{(\Delta z)}$$

$$= \left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\,\overline{(\Delta z)}}{\Delta z} \right) + \overline{(z)}$$

وباعتبار ان $z = x + iy$، $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ينتج

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(\Delta x - i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + (x - iy)$$

الان عندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الحقيقي نحصل على $\Delta y = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(\Delta x)}{\Delta x} + (x - iy)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 2x$$

$$= 2x = L_1$$

وعندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الخيالي نحصل على $\Delta x = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(-i\Delta y)}{i\Delta y} + (x - iy)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} -(x+iy) + (x - iy)$$

$$= -2yi = L_2$$

بما ان $L_1 \neq L_2$

اذن المشتقة غير موجودة

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(13.2) معادلة كوشي– ريمان

الدالة $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة $z_0 = x_0 + y_0$ اذا حققت الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: ان تكون جميع المشتقات الجزئية للدالتين u, v موجودة ومستمرة عند جوار z_0 في المنطقة D أي ان u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة عند جوار z_0 في المنطقة D.

الشرط الثاني: إذا حققت معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ويعبر عن المشتقة عند النقطة z اما بالصيغة $f'(z) = u_x + iv_x$ أو بالصيغة $f'(z) = v_y + iu_y$.

مثال بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

$$\textbf{(1)}\ \ f(z) = z^2 \qquad , \qquad \textbf{(2)}\ \ f(z) = \bar{z}$$

الحل:

$$\textbf{(1)}\ \ f(z) = z^2\,,$$
$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة وكذلك الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

اذن الدالة $f(z) = z^2$ قابلة للاشتقاق

$$f'(z) = u_x + iv_x \Rightarrow\ f'(z) = 2x + i2y \ \Rightarrow\ f'(z) = 2(x+iy) \Rightarrow\ f'(z) = 2z$$

(2) $f(z) = \bar{z}$,

$$f(z) = \overline{(x+iy)} = x - iy$$

$$u(x,y) = x \quad , \quad v(x,y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ولكن الدالة لا تحقق معادلتي كوشي – ريمان لان

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

اذن الدوال $f(z) = \bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق .

(14.2) الدالة التحليلية

يقال ان الدالة $w = f(z)$ انها تحليلية في النقطة z_0 اذا كانت قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 وفي جوار النقطة z_0 .

ويقال ان الدالة $w = f(z)$ انها تحليلية في المنطقة D اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المنطقة D .

مثال عند أي نقطة تكون الدالة الاتية $f(z) = x^2 + iy^2$ دالة تحليلية في المنطقة D

الحل:

$$f(z) = x^2 + iy^2 \Longrightarrow u(x,y) = x^2 , \quad v(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ، اما بالنسبة معادلتي كوشي – ريمان فان

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ولكي تكون $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ يجب ان $x = y$.

اذن تكون الدالة f تحليلية عندما يكون الجزء الحقيقي والخيالي متساويان أي $R(f(z)) = I(f(z))$.

مثال برهن ان الدالة الاتية $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق عند $z = 0$ ولكنها ليست تحليلية عند تلك النقطة

الحل: أولا نبرهن ان المشتقة موجودة عند $z = 0$ (نستخدم التعريف لإيجاد المشتقة)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z \overline{z} + \Delta z \overline{\Delta z} - z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z \overline{z} + \Delta z \overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

إذا كانت $z = 0$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{(0)\overline{\Delta z}}{\Delta z} + (0) + \overline{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = 0$$

اذن المشتقة موجودة عند النقطة $z = 0$ وتساوي $f'(0) = 0$

الان نبرهن ان الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$ ، اي نبرهن المشتقة الدالة غير موجودة بجوار النقطة $z = 0$

اذا كانت $z \neq 0$ وكانت Δz حقيقية أي ان $\Delta z = \Delta x$ ، اذن $\overline{\Delta z} = \Delta x$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z\Delta x}{\Delta x} + \overline{z} + \Delta x = z + \overline{z}$$

$$f'(z) = z + \overline{z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اما اذا كانت Δz خيالية أي ان $\Delta z = i\Delta y$ اذن $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$ نعوض في المعادلة (*) نحصل

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-iz\Delta y}{i\Delta y} + \overline{z} - i\Delta y = -z + \overline{z}$$

$$f'(z) = -z + \overline{z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بما ان المعادلتين (2) و(3) غير متساويتين فأن المشتقة غير موجودة بجور النقطة $z = 0$.

اذن الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$.