مثال برهن ان الدالة الاتية $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق عند $z = 0$ ولكنها ليست تحليلية عند تلك النقطة

الحل: أولا نبرهن ان المشتقة موجودة عند $z = 0$ (نستخدم التعريف لإيجاد المشتقة)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

إذا كانت $z = 0$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{(0)\overline{\Delta z}}{\Delta z} + (0) + \overline{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = 0$$

اذن المشتقة موجودة عند النقطة $z = 0$ وتساوي $f'(0) = 0$

الان نبرهن ان الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$ ، اي نبرهن المشتقة الدالة غير موجودة بجوار النقطة $z = 0$

اذا كانت $z \neq 0$ وكانت Δz حقيقية أي ان $\Delta z = \Delta x$ ، اذن $\overline{\Delta z} = \Delta x$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z\Delta x}{\Delta x} + \overline{z} + \Delta x = z + \overline{z}$$

$$f'(z) = z + \overline{z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اما اذا كانت Δz خيالية أي ان $\Delta z = i\Delta y$ اذن $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$ نعوض في المعادلة (*) نحصل

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-iz\Delta y}{i\Delta y} + \overline{z} - i\Delta y = -z + \overline{z}$$

$$f'(z) = -z + \overline{z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بما ان المعادلتين (2) و(3) غير متساويتين فأن المشتقة غير موجودة بجور النقطة $z = 0$.

اذن الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$.

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(15.2) الدالة الكلية

ويقال ان الدالة $w = f(z)$ انها كلية اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوى المعقد .

مثال هل الدالة الاتية $f(z) = z^2$ كلية

الحل: الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوى المعقد اذن الدالة كلية.

(16.2) النقاط الشاذة

تكون الدالة $w = f(z)$ تحليلية في جوار النقطة z_0 ماعدا عند z_0 نفسها فأن النقطة z_0 تسمى نقطة شاذة .

مثال جد النقاط الشاذة الدالة الاتية $w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

الحل:

$$f'(z) = \frac{2}{(z-1)^2}$$

اذن المشتقة غير موجودة عند النقطة $z = 1$ ، اذن النقطة الشاذة هي $\{1\}$.

ملاحظات :

(1) دالة متعدد الحدود تكون تحليلية لجميع نقاط المستوى المعقد، أي انها تكون دالة كلية.

(2) اذا كانت الدالة $w = f(z)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة $f(z)$ تحقق معادلتي كوشي – ريمان.

(3) اذا كانت الدالتان $g(z), f(z)$ دوال تحليلية في المنطقة D فأن كلا من يأتي دوال تحليلية :

$$f(z) \pm g(z)\,, \qquad f(z).\,g(z) \quad , \qquad \frac{f(z)}{g(z)}\,, g(z) \neq 0$$

Exercises (8)

(1) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

(I) $f(z) = e^{\bar{z}}$, (II) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

(2) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية تحليلية ام لا؟

(I) $f(z) = e^{z}$, (II) $f(z) = xy + iy$

(3) هل الدالة $f(z) = e^z$ دالة كلية ؟

(4) اثبت ان الدالة $f(z) = (\bar{z})^2$ ليست دالة كلية؟

(5) جد النقاط الشاذة للدالة الاتية $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$

(6) برهن اذا كانت الدالة $w = f(z)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان.

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل التمارين 8

(1) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

(I) $f(z) = e^{\bar{z}}$, **(II)** $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

الحل:

(I) $f(z) = e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}e^{-iy}$

$= e^{x}(\cos y - i \sin y)$

$u(x,y) = e^{x}\cos y$, $v(x,y) = -e^{x}\sin y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^{x}\sin y$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{x}\cos y$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ولكن الدالة لا تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

اذن الدالة $f(z) = e^{\bar{z}}$ غير قابلة للاشتقاق.

(II) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

$u(x,y) = 3x + y$, $v(x,y) = 3y - x$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -1$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة وايضاً الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

اذن الدالة $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ قابلة للاشتقاق.

$f'(z) = u_x + iv_x \Longrightarrow \ f'(z) = 3 - i\,.$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(2) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية تحليلية ام لا؟

(I) $f(z) = e^{Z}$, **(II)** $f(z) = xy + iy$

الحل:

(I) $f(z) = e^{Z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$

$u(x,y) = e^{x}\cos y \quad , \quad v(x,y) = e^{x}\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y$

اذنن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{x}\sin y$$

اذن الدالة $f(z) = e^{z}$ دالة تحليلية.

(3) بين فيما إذا كانت الدوال $f(z) = e^{z}$ كلية ام لا؟

الحل: الدالة تحليلية $f(z) = e^{z}$ في جميع نقاط المستوي المعقد اذن الدالة كلية.

(4) اثبت ان الدالة $f(z) = (\overline{z})^{2}$ ليست دالة كلية؟

الحل:

$$f(z) = \left(\overline{x+iy}\right)^{2} = f(z) = (x-iy)^{2} = x^{2} - y^{2} - 2ixy$$

$u(x,y) = x^{2} - y^{2}, \quad v(x,y) = -2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ، والدالة لا معادلتي كوشي – ريمان لان

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} \neq -\frac{\partial u}{\partial y}$$

اذن الدالة ليست تحليلية اذن الدالة ليست كلية

(5) جد النقاط الشاذة الدالة الاتية $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$

الحل: اذن المشتقة غير موجودة عند النقطة $z = 2$ النقاط الشاذة هي $\{2\}$

(17.2) الدوال التوافقية

الدالة $u(x,y)$ تكون دالة توافقية اذا حققت الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: ان تكون جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة u موجودة ومستمرة في المنطقة D أي ان

الشرط الثاني: تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ملاحظات:

اذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة $f(z)$ فأن كلاً من $u(x,y)$, $v(x,y)$ دوال توافقية.

اذا كانت الدالة $u(x,y)$ **دالة توافقية** فأن الدالة $v(x,y)$ تسمى **مرافق توافقي** للدالة $u(x,y)$.

مثال اثبت ان الدالة $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ دالة توافقية:

الحل:

$$u_x = -6xy \qquad , \qquad u_y = 3y^2 - 3x^2$$

$$u_{xx} = -6y \qquad , \qquad u_{yy} = 6y$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 6y - 6y = 0$$

بما ان جميع المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة والدالة تحقق معادلة لابلاس ، اذن الدالة u دالة توافقية .

مثال اذا كنت دالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ التحليلية جد المرافق التوافقي الدالة:

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$$

الحل: بما ان الدالة $f(z)$ تحليلية اذن تحقق معادلتي كوشي– ريمان

$$u_x = v_y = -6xy$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y)=\int -6xy\,dy=-6x\frac{(y)^2}{2}+q(x)$$

$$v(x,y)=-3xy^2+q(x) \qquad \dots\dots\dots(1)$$

(ملاحظة اضفنا الدالة $q(x)$ وليس ثابت C وذلك لان الدالة $v(x,y)$ ذات المتغيرين.)

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+\frac{dq}{dx}$$

من معادلة كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ نحصل

$$3y^2-3x^2=3y^2-\frac{dq}{dx}$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $\frac{dq}{dx}=3x^2$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x)=\int 3x^2dx=x^3+C \qquad \dots\dots\dots(2)$$

(ملاحظة اضفنا ثابت C وذلك لان الدالة $q(x)$ ذات متغير واحد) ، نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$$

مثال اذا كنت $u(x,y)=y^3-3x^2y\,,\; v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$ اكتب $f(z)$ بدلالة المتغير z:

الحل:

$$\begin{aligned}
f(z)&=u(x,y)+iv(x,y)\\
&=(y^3-3x^2y)+i(-3xy^2+x^3+C)\\
&=y^3-3x^2y-3ixy^2+ix^3+iC\\
&=i[(x^3-3x^2y+3ixy^2+iy^3)+C]\\
&=i[(x+iy)^3+C]=i(z^3+C)
\end{aligned}$$

مثال اذا كنت دالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ التحليلية جد المرافق التوافقي الدالة:

$$u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$$

الحل: بما ان الدالة $f(z)$ تحليلية اذن تحقق معادلتي كوشي− ريمان

$$u_x = v_y = 2 - 3x^2 + 3y^2$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int 2 - 3x^2 + 3y^2\, dy$$

$$v(x,y) = 2y - 3yx^2 + y^3 + q(x) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6yx + \frac{dq}{dx}$$

من معادلة كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ نحصل

$$6xy = -\left(-6yx + \frac{dq}{dx}\right)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $\frac{dq}{dx} = 0$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = C \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة $v(x,y)$، وكما يلي:

$$v(x,y) = 2y - 3yx^2 + y^3 + C$$

Exercises (9)

اذا كانت الدوال الاتية

(I) $u(x,y) = 2x(1-y)$, (II) $v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$

1. هل معادلة لابلاس تحقق لهذه الدوال:
2. جد المرافق التوافقي لكل دالة:

حل التمارين 9

(I) $u(x,y) = 2x(1-y)$

الحل

1. هل المعادلة تحقق معادلة لابلاس

$$u_x = 2(1-y) \quad , \quad u_y = -2x$$
$$u_{xx} = 0 \quad , \quad u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 - 0 = 0$$

اذن الدالة $u(x,y) = 2x(1-y)$ تحقق معادلة لابلاس.

2. إيجاد المرافق التوافقي

$$u_x = v_y = 2(1-y):$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int 2(1-y)\,dy$$
$$v(x,y) = 2y - y^2 + q(x) \qquad \dots\dots\dots(1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$v_x = q'(x)$$

من معادلة كوشي ريمان $u_y = -v_x$ نحصل

$$-2x = -q'(x)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $q'(x) = 2x$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = \int 2x dx = x^2 + C \qquad \dots\dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + C$$

(II) $u(x,y) = e^{-x}(\cos y + \sin y)$

الحل

1. هل المعادلة تحقق معادلة لابلاس

$$\Rightarrow u(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y$$

$$u_x = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y \quad , \quad u_y = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y$$

$$u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y \quad , \quad u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y = 0$$

اذن الدالة $u(x,y) = e^{-x}(\cos y + \sin y)$ تحقق معادلة لابلاس.

2. إيجاد المرافق التوافقي

$$u_x = v_y = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y \, dy$$

$$v(x,y) = -\,e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y + q(x) \qquad \dots\dots\dots (1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$v_x = e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y + q'(x)$$

من معادلة كوشي ريمان $u_y = -v_x$ نحصل :

$$u_y = -v_x$$

$$-e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y = -[e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y + q'(x)]$$

$$-e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y = -\,e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y - q'(x)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $q'(x) = 0$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = C \qquad \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y) = -\,e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y + C$$