وبطريقة مشابهة يمكن برهان

$a \cdot (-b) = -(ab)$ H.W.

(٣) $-(-a) = a$

$\because -(-a) = -(-a) + 0$

$\because (-a) + a = 0$

بأستخدام خاصية العنصر المحايد والنظير الجمعي

$\therefore -(-a) = -(-a) + (-a) + a$

$= [-(-a) + (-a)] + a$

$\therefore -(-a) = 0 + a$

$\therefore -(-a) = a$

(٤) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

باستخدام الخاصية $-(-a) = a$ و

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

نحصل على

$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة: إذا كان $a,b\in Z$ فإن

١- $a\cdot 0=0\cdot a=0$

٢- $(-a)(b)=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$

٣- $-(-a)=a$

٤- $(-a)(-b)=ab$

البرهان:

(١) $a\cdot 0=0\cdot a=0$

$\because\ 0=0+0$

$\therefore a(0+0)=a\cdot 0$

$\Rightarrow a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0$ (٥) بأستخدام الخاصية

$\Rightarrow a\cdot 0=0$ وبأستخدام الخاصية (١)

$\therefore a\cdot 0=0\cdot a=0$

(٢) $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(ab)$

$\because (-a)\cdot b=(-a)b+0$ باستخدام الخاصية (٣)

$\because a\cdot b+(-(a\cdot b))=0$ باستخدام الخاصية (٤)

وكذلك باستخدام الخواص ① و③ و⑤

$\Rightarrow (-a)\cdot b=(-a)\cdot b+[a\cdot b+(-(a\cdot b))]$

$=[(-a)\cdot b+a\cdot b]+(-(a\cdot b))$

$=(-a+a)b+(-(a\cdot b))$

$=0\cdot b+(-(a\cdot b))$

$\therefore (-a)\cdot b=-(a\cdot b)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤- لكل $a \in Z$ يوجد $(-a)$ بحيث أن
$a+(-a) = (-a)+a = 0$

٥- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
أي أن الضرب يتوزع على الجمع

٦- إذا كان $a+b = a+c$ فإن $b = c$

٧- إذا كانت $a, b \in Z$ فإن $a+b \in Z$
وهذا يعني أن Z مغلقة تحت عملية الجمع
وأيضاً $a \cdot b \in Z$ يعني أن Z مغلقة تحت
عملية الضرب

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الأعداد الصحيحة

أن المعادلة $a = b + x$ حيث أن $a, b \in N$ لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية N وهو $x = a - b$ إذا كانت $a > b$

اما إذا كانت $a < b$ فلا يوجد لها حل في N ولهذا ظهرت الحاجة الى توسيع مجموعة الأعداد الطبيعية الى مجموعة أخرى تسمى (مجموعة الأعداد الصحيحة) ويرمز لها بالرمز Z وتشمل

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

خواص الأعداد الصحيحة

لتكن $a, b, c \in Z$ فإن

١. $a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

أي أن عمليتي الجمع والضرب ابدالية على Z

٢- $a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

أي أن جمع وضرب الأعداد الصحيحة تجميعية

٣- $a + 0 = 0 + a = a$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

وهذا يعني أن (0) العنصر المحايد الجمعي
و (1) العنصر المحايد الضربي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

EX: let $x=1$, $y=2$, $z=3$

$$(1 \cdot 2) \cdot 3 \stackrel{?}{=} 1 \cdot (2 \cdot 3)$$

$$2 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 1 \cdot 6$$

$$\therefore \quad 6 = 6$$

٣- خاصية توزيع الضرب على الجمع

ليكن $x, y, z \in N$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

EX: let $x=2$, $y=3$, $z=4$

$$2(3+4) \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$2(7) \stackrel{?}{=} 6 + 8$$

$$\therefore \quad 14 = 14$$

٤- خاصية الاختزال

$$x + y = z + y$$

$$\therefore \quad x = z$$

٥- إذا كانت $a, b \in N$ فإن

$$\text{if } a+b=0 \iff a=0 \wedge b=0$$

٦- خاصية الترتيب

ليكن $k, m, n \in N$ فإن

$$n < m \longleftrightarrow n+k < m+k$$

اما في عملية الضرب فإن

$$n < m \longleftrightarrow n \cdot k < m \cdot k$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(1)

الأعداد الطبيعية

عرف الأنسان مجموعة الأعداد الطبيعية منذ امد بعيد كما أنه تعرف على بعض خواصها وعلى بعض العمليات عليها

خواص الأعداد الطبيعية

1- خاصية التبادلية لعمليتين (الجمع والضرب)

ليكن $X, Y \in N$ فإن

$$X + Y = Y + X$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Ex: let $X = 5$, $Y = 2$

$\therefore 5 + 2 = 2 + 5$

and $(5)(2) = (2)(5)$

2- خاصية التجميع في عمليتين الجمع والضرب

ليكن $X, Y, Z \in N$ فإن

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

EX: let $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 3$

$$(1 + 2) + 3 \stackrel{?}{=} 1 + (2 + 3)$$

$$3 + 3 \stackrel{?}{=} 1 + 5$$

$$\therefore 6 = 6$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner