$$= \frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k^2+7k+6\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[(2k+3)(k+2)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}$$

∴ العبارة صحيحة عندما $n = k+1$

∴ العبارة صحيحة لكل قيم n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :- أثبت أن

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لكل عدد صحيح موجب n

والحل :-

١- نبرهن أن العبارة صحيحة عندما $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

الطرف الأيسر

$$\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

الطرف الأيمن

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

∴ العبارة صحيحة عندما $n=1$

٢- نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

٣- أثبت أن العبارة صحيحة عندما $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢- نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=K$ أي أن

$$\sum_{i=1}^{K} i = \frac{K(K+1)}{2}$$

٣- نبرهن العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

$$\sum_{i=1}^{K+1} i = \sum_{i=1}^{K} + (K+1)$$

$$= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) = \frac{K(K+1)+2(K+1)}{2}$$

$$= \frac{K^2+K+2K+2}{2} = \frac{K^2+3K+2}{2}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{K+1} i = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

∴ العبارة صحيحة عندما $n=K+1$

∴ العبارة صحيحة لكل قيم n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

كل عدد صحيح $n \geq 1$

الحل:

① نبرهن العبارة صحيحة عندما $n=1$

الطرف الأيسر $2(1)-1=2-1=1$

الطرف الأيمن $n^2=1^2=1$

∴ العبارة صحيحة عندما $n=1$

② نفرض أن العبارة صحيحة عندما $n=k$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

③ نثبت أن العبارة صحيحة عندما $n=k+1$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=$$

$$=k^2+(2k+2-1)$$

$$=k^2+2k+1$$

$$=(k+1)(k+1)$$

$$=(k+1)^2$$

∴ العبارة صحيحة عندما $n=k+1$

∴ العبارة صحيحة لكل قيم $n \geq 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner