الاحصاء المتقدم / المرحلة الثانية
قسم الرياضيات/ كلية التربية الاساسية
المفردات الدراسية

1- **التوزيع الاحتمالي، المتغير العشوائي، التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة، توزيع ذي الحدين، توزيع برنولي، توزيع بوسون، المنحني الطبيعي، المساحة تحت المنحني الطبيعي، التوزيع الطبيعي، العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ذي الحدين.**
2- **نظرية المعاينة ، تصاميم العينات، توزيع المعاينة لكلا مما يلي:**
   أ- **لمتوسط عينة واحدة لمجتمع مسحوبة لمجتمع طبيعي**
   ب- **للفرق بين متوسطين حسابيين.**
   ت- **اختبار النسبة لعينة واحدة.**
   ث- **اختبار الفرق بين نسبتين لعينتين مسحوبة للمجتمع.**
3- **اختبار الفرضيات ، خطوات اختبار الفرضيات، اختبارات تتعلق بالمتوسطات المذكورة بالفقرة 2 .**
4- **اختبار Z وتوزيع T ، توزيع مربع كاي، توزيع F (من حيث شكل التوزيع واشتقاقه وايجاد القيم الجدولية).**

الفصل الأول

نستعرض في هذا الفصل التعاريف الاساسية والتي تتعلق بكلا من التوزيع الاحتمالي، المتغير العشوائي، التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة، توزيع ذي الحدين، توزيع برنولي، توزيع بوسون، المنحني الطبيعي، المساحة تحت المنحني الطبيعي، التوزيع الطبيعي، العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ذي الحدين.

1 – 1 التجربة العشوائية:

نعرف التجربة العشوائية بانها حالة يمكننا من خلالها ملاحظة نتيجة ما وهنالك نوعان اساسيان من التجارب محددة وغير محددة(عشوائية) ويرمز لها بالرمز ζ .

مثال(1): عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة فأنها تجربة عشوائية وان نتائجها هي اما ظهور الصورة H أو الكتابة T ولتكن ζ_1 رمز لهذه التجربة.

مثال(2): عند رمي قطعة زهرة نرد مرة واحدة فأنها تجربة عشوائية وان نتائجها هي ان يكون عدد النقاط على الوجه العلوي لقطعة النرد هي $1,2,3,4,5,6$ ولتكن ζ_2 رمز لهذه التجربة.

مثال(3): عند فحص فصيلة الدم لشخص ما هي تجربة عشوائية وان نتائجها هي اما ان يكون A, B, AB, O ولتكن ζ_3 رمز لهذه التجربة.

1 – 2 فضاء العينة:

ان فضاء العينة لتجربة عشوائية ζ هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتلك التجربة ويرمز لفضاء العينة بالرمز S واحيانا يرمز لها بالرمز Ω .

مثال(4):

ان فضاء العينة للمثال (1) هو

$$S_1 = \{H, T\}$$

<u>مثال(5):</u>

ان فضاء العينة للمثال (2) هو

$$S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

<u>مثال(6):</u>

ان فضاء العينة للمثال (3) هو

$$S_3 = \{A, B, AB, O\}$$

<u>مثال(7):</u>

جد فضاء العينة المتعلق بالتجربة العشوائية وهي رمي قطعة نقود معدنية وقطعة من زهر النرد؟.

<u>الحل</u>: (واجب)؟

<u>مثال(8):</u>

جد فضاء العينة المتعلق بالتجربة العشوائية وهي رمي قطعة نقود معدنية مرتين ؟.

<u>الحل</u>:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

<u>مثال(9):</u>

جد فضاء العينة المتعلق بالتجربة العشوائية وهي رمي مكعبي (قطعتين) نرد مرة واحدة ؟.

<u>الحل</u>:

$$S = \{(i, j), i = 1,2,3,4,5,6; j = 1,2,3,4,5,6\}$$

أي ان:

$$S = \{(1,1),(1,2)(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$,(2,1),(2,2)(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$,(3,1),(3,2)(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$,(4,1),(4,2)(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$,(5,1),(5,2)(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$,(6,1),(6,2)(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

1 – 3 الحادثة:

هي مجموعة جزئية من فضاء العينة S ويرمز للحادثة بأحد الاحرف الاتية:
. $A,B,C,D,...$

<u>مثال(10):</u>

في التجربة ζ_1 من <u>مثال</u> (1) السابق يمكننا ان نعرف الحوادث التالية:

$A_1 = \{H\} =$ **ظهور الصورة**

$A_1 = \{T\} =$ **ظهور الكتابة**

$A_1 = \{H,T\} =$ **ظهور الصورة او الكتابة**

1 – 4 التعريف الكلاسيكي للاحتمالية:

لتكن S هي فضاء العينة والتي تضم عددا منتهيا من العناصر المختلفة $S = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$ ولنفرض ان احتمالات كل من $s_1, s_2, ..., s_N$ متساوية ولتكن p أي ان:

$$p(s_1) = p(s_2) = ... = p(s_N) = p$$

فانه من الواضح ان $p = \frac{1}{N}$ ، فاذا كان لدينا الحادثة A معرفة على S وتضم العناصر $s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{in}$ أي ان : $A = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{in}\}$ حيث ان

$s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}$ هي بعض عناصر S . ان احتمال حدوث الحادثة A يساوي عدد عناصر الحادثة A مقسوما على عدد عناصر فضاء العينة S أي ان:

$$p(A) = \frac{n}{N}$$

<u>مثال(11):</u> عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة احسب احتمال ظهور الصورة H ؟.

الحل:

$S = \{H, T\}$ **هو مجموعة فضاء العينة** $N = 2$

$A = \{H\}$ **هي الحادثة (ظهور الصورة)** $n = 1$

$$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

<u>مثال(12):</u>

في تجربة رمي قطعة زهرة نرد مرة واحدة اذا كان الحادثان

$A = \{2,4,6\} =$ **ظهور عدد زوجي**

$B = \{2,5\} =$ **ظهور2 أو 5**

احسب كلا مما يلي: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$

<u>الحل:</u>

$$A \cup B = \{2,4,6,5\};\ A \cap B = \{2\}$$

$$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{n}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cup B) = \frac{n}{N} = \frac{4}{6};\ p(A \cap B) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

1 – 5 التعريف البديهي(بديهيات كولموكوروف) :

لكل حادثة A في فضاء العينة S نؤشر عددا موجبا يسمى احتمالية حدوث A والذي يرمز له بالرمز $p(A)$ ويحقق البديهيات الاتية:

1- $0 \leq p(A) \leq 1$

2- $p(S) = 1$.

3- لأي حادثين متنافيين مثل A, B ، $A \bigcap B = \phi$

$$p(A \bigcup B) = p(A) + p(B)$$

1 – 6 المتغير العشوائي: هو دالة معرفة من فضاء العينة S الى مجموعة الاعداد الحقيقية R أي ان

$$X : S \to R;\ \forall w \in S; \exists X(w) = x \in R$$

أي ان $X(w)$ هو المتغير العشوائي $X(w) = x$ ويرمز للمتغير العشوائي بحرف كبير كما يلي: $X, Y, Z, W, \ldots$.

<u>مثال(13):</u> عند رمي قطعة نقود معدنية مرتين فأن فضاء العينة هو

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

فاذ فرضنا ان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور التي ستظهر في الرميتين فان المتغير العشوائي سيكون كما يلي:

$$X(HH) = 2; X(HT) = 1; X(TH) = 1; X(TT) = 0$$

1 – 7 دالة التوزيع الاحتمالي: لأي متغير عشوائي X فأننا نعرف دالة التوزيع الاحتمالي $F_x(X)$ كما يلي

$$F_x : R \to [0,1]$$

$$F_x(X) = p(X \le x) = p(\{s \in S; X(s) \le x\})$$

حيث ان X هو عدد حقيقي وان الدالة $F_x(X)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X وعادة تكتب دالة التوزيع للمتغير X عند النقطة x هي $F(X)$ واهم خصائصها :

1- $0 \le F(X) \le 1$

2- $\lim_{x\to-\infty} F(X) = 0; \lim_{x\to\infty} F(X) = 1$.

3- لأي قيمتين مثل a, b ، $a \le b$

$$p(a \langle x \langle b) = F(b) - F(a)$$

<u>مثال(14):</u>

اذا كان المتغير العشوائي X يأخذ القيم الاتية $-1,0,1$ بالاحتمالات الاتية:

$$p(X=-1) = \tfrac{1}{4}; p(X=0) = \tfrac{1}{2}; p(X=1) = \tfrac{1}{4}$$

جد دالة التوزيع ؟

الحل:

$$F(-1) = p(X \le -1) = p(X=-1) = \tfrac{1}{4}$$
$$F(0) = p(X \le 0) = p(X=-1) + p(X=0) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

$$F(1) = p(X \le 1) = p(X=-1) + p(X=0) + p(X=1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1$$

1 – 8 المتغيرات العشوائية المتقطعة : وهي متغيرات عشوائية لها فضاء مدى يحتوي عددا منتهيا من النقاط حيث ان فضاء المدى للمتغير المتقطع X يكون بالشكل الاتي:

$$R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; x_1 \langle x_2 \langle \ldots \langle x_n$$

$$p(x_i) = p(X = x_i); i = 1,2,3,\ldots$$

ان المتتابعة $\{p(x_i)\}_{i=1}^{n}$ تسمى دالة كتلة احتمال وتحقق الشرطان الآتيين:

1- $0 \le p(x_i) \le 1$

2- $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

مثال(15): عند رمي قطعة نقود معدنية ثلاث مرات فاذ فرضنا ان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في هذه التجربة ، جد دالة كتلة الاحتمال للمتغير X ؟.

الحل: أن فضاء العينة في هذه التجربة هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

نقاط فضاء العينة	قيمة المتغير العشوائي X
HHH	**3**
HHT	**2**
HTH	**2**
THH	**2**
HTT	**1**
TTH	**1**
THT	**1**
TTT	**0**

ان فضاء المدى للمتغير العشوائي X يتألف من العناصر 0,1,2,3

$$p(0) = p(x=0) = \tfrac{1}{8}, \; p(1) = p(x=1) = \tfrac{3}{8}$$
$$p(2) = p(x=2) = \tfrac{3}{8} \quad p(3) = p(x=3) = \tfrac{1}{8}$$

1 – 9 دالة كثافة الاحتمال: اذا كان x متغير عشوائي يأخذ قيمة في فترة محددة أو غير محددة