$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$$

فان الدالة $f_x(u)$ تسمى دالة كثافة احتمال للمتغير x وللاختصار سنكتب $f(x)$ بدلا من $f_x(x)$ وان $F(x)$ هي دالة التوزيع

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

أي ان دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ هي مشتقة دالة التوزيع $F(x)$.

- **خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$:**

1- $\forall x, f(x)\geq 0$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

3- لأي قيمتين مثل a,b وان $a\leq b$

$$p(a<x\leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

<u>مثال(16):</u> اذا كانت دالة التوزيع للمتغير المستمر x معرفة كما يلي:

$$F(x)=\begin{Bmatrix} \frac{x}{1+x} & if & x\geq 0 \\ 0 & if & x<0 \end{Bmatrix}$$

جد دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ؟.

الحل: ان دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ هي مشتقة دالة التوزيع $F(x)$.

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} \frac{x}{1+x} & , & x\geq 0 \\ 0 & , & x<0 \end{Bmatrix}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(1+x).1-x}{(1+x)^2} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

<u>مثال(17):</u> اذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \quad 5\leq x\leq 7\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

حيث ان $o.w.$ تعني الحالات الاخرى ،

اوجد كلا مما يأتي:

1- $p(5.75\leq x\leq 6.25)$

2- $p(x\leq 6)$

3- $p(x\leq t);5<t<7$

الحل: **1-**

$$p(5.75\leq x\leq 6.25)=\int_{5.75}^{6.25}f(x)dx=\int_{5.75}^{6.25}\tfrac{1}{2}\,dx=0.25$$

2-

$$p(x\leq 6)=p(-\infty<x\leq 6)=\int_{-\infty}^{6}f(x)dx=\int_{-\infty}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{6}f(x)dx=$$

$$=0+\int_{5}^{6}\tfrac{1}{2}\,dx=0.5$$

3-

$$p(x \le t) = p(-\infty < x \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{t} f(x)dx =$$

$$= 0 + \int_{5}^{t} \tfrac{1}{2}\, dx = \tfrac{1}{2}[t-5]$$

<u>مثال(18):</u> اذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} ax & ;0 \le x \le 1 \\ a & ;1 \le x \le 2 \\ -ax + 3a & ;2 \le x \le 3 \\ 0 & ;o.w. \end{cases}$$

حيث ان $o.w.$ تعني الحالات الاخرى، وان a هو مقدار ثابت، اوجد قيمة الثابت a ثم اوجد $p(x \le 1.5)$ ؟.

الحل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \int_{0}^{1} (ax)dx + \int_{1}^{2} (a)dx + \int_{2}^{3} (-ax + 3a)dx = 1$$

$$= a\int_{0}^{1} xdx + a\int_{1}^{2} dx - a\int_{2}^{3} xdx + 3a\int_{2}^{3} dx = 1$$

$$= a[\tfrac{x^2}{2}]_0^1 + a[x]_1^2 - a[\tfrac{x^2}{2}]_2^3 + 3a[x]_2^3 = 1$$

$$= \tfrac{a}{2}[1-0] + a[2-1] - \tfrac{a}{2}[9-4] + 3a[3-2] = 1$$

$$= \tfrac{a}{2} + a - \tfrac{5a}{2} + 3a = 1$$

$$= 2a = 1; \Rightarrow a = \tfrac{1}{2} = 0.5$$

اذا دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ هي كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 0.5x & ;0\le x\le 1 \\ 0.5 & ;1\le x\le 2 \\ -0.5x+1.5 & ;2\le x\le 3 \\ 0 & ;o.w. \end{cases}$$

$$p(x\le 1.5)=p(-\infty<x\le 1.5)=\int_{-\infty}^{1.5} f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{1.5} f(x)dx=$$

$$=0+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{1.5} f(x)dx$$

$$=0.5\int_{0}^{1} xdx+0.5\int_{1}^{1.5} dx$$

$$=0.5[\tfrac{x^2}{2}]_0^1+0.5[x]_1^{1.5}$$

$$=\tfrac{0.5}{2}[1-0]+0.5[1.5-1]$$

$$=0.25[1-0]+0.5[0.5]=0.5$$

1 – 10 (التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة)

اذا كان x متغير عشوائي متقطع فأن القيمة المتوقعة له يرمز لها بالرمز $E(x)=\mu$ واذا كان $p_x(x)$: هي دالة كتلة احتمال للمتغير x فأن:

$$E(x)=\sum_x xp_x(x)$$

اذا كان x متغير عشوائي مستمر فأن القيمة المتوقعة له هي كما يلي:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

<u>مثال(19):</u> اذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

فجد القيمة المتوقعة $E(x)=\mu$ للمتغير العشوائي x ؟.

الحل:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x(2x)dx=2\int_0^1 x^2dx=\tfrac{2}{3}[x^3]_0^1=\tfrac{2}{3}$$

<u>مثال(20):</u> اذا كان x متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة الاحتمال $p_x(x)$ معرفة كما يلي:

$$p_x(x)=\begin{cases}\frac{x}{6} & , \quad x=1,2,3\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

فجد القيمة المتوقعة $E(x)=\mu$ للمتغير العشوائي x ؟.

الحل:

$$E(x)=\sum_{x=1}^{3} xp_x(x)=1.p(x=1)+2.p(x=2)+3.p(x=3)$$

$$=1.\tfrac{1}{6}+2.\tfrac{2}{6}+3.\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{6}+\tfrac{4}{6}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{14}{6}=2.333$$

1 – 11 التباين

اذا كان x متغير عشوائي فأننا نعرف التباين $V(x)=\sigma^2$ كما يلي:

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\sigma^2$$
$$V(x)=E[\{x-E(x)\}\{x-E(x)\}]$$
$$V(x)=E[x^2-xE(x)-xE(x)+(E(x))^2]$$
$$V(x)=E(x^2)-2(E(x))^2+(E(x))^2$$
$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

حيث ان القيمة المتوقعة له يرمز لها بالرمز $E(x)=\mu$ وان الانحراف المعياري(القياسي) هو σ .

ملاحظات: البرهان واجب

1- لأي ثابتين مثل a,b فان التوقع هو خطي أي ان

$$E(a+b)=a+b \;\;,\;\; E(ax+b)=aE(x)+b$$

2- $V(a)=0$ **، تباين الثابت هو صفر.**

3- $V(ax+b)=a^2V(x)+0$

مثال(21): اذا كان x متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة الاحتمال $p_x(x)$ معرفة كما يلي:

$$p_x(x)=\begin{cases} \frac{1}{5} \;\;, & x=-2,0,1,3,4 \\ 0 \;\;, & o.w. \end{cases}$$

باحتمالات متساوية اوجد الانحراف المعياري والتباين للدالة $g(x)=4x-7$ ؟.

الحل:

$$E(x)=\sum_x xp_x(x)=-2.\tfrac{1}{5}+0.\tfrac{1}{5}+1.\tfrac{1}{5}+3.\tfrac{1}{5}+4.\tfrac{1}{5}$$

$$=\tfrac{-2}{5}+0+\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}+\tfrac{4}{5}=\tfrac{6}{5}=1.2$$

$$E(x^2)=\sum_x x^2p_x(x)=\sum_x x^2\,\tfrac{1}{5}=-2^2.\tfrac{1}{5}+0^2.\tfrac{1}{5}+1^2.\tfrac{1}{5}+3^2.\tfrac{1}{5}+4^2.\tfrac{1}{5}$$

التب

$$=\tfrac{4}{5}+0+\tfrac{1}{5}+\tfrac{9}{5}+\tfrac{16}{5}=\tfrac{30}{5}=6$$

اين

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=6-(1.2)^2=4.56$$

التباين للدالة $g(x)=4x-7$

$$V(g(x))=V(4x-7)=16V(x)-0=16.(4.56)=72.96$$

الانحراف المعياري (جذر التباين)

$$\sigma_{g(x)}=\sqrt{72.96}=8.54$$

1 – 12 دالة توليد العزوم

اذا كان x متغير عشوائي فأننا نعرف دالة توليد العزوم للمتغير x كما يلي:

$$M_x(t) = M(t) = E[e^{tx}]; -\infty < t < \infty$$

فاذا كان x متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة الاحتمال $p_x(x)$

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} p_x(x)$$

واذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

1 – 13 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1 – 13- 1 اولاً: توزيع برنولي: Bernoulli Distribution

إذا كانت نتيجة تجربة من تجارب برنولي تكون احدى النتيجتين أما النجاح p او الفشل q ، $q = 1 - p$ فاذا كان المتغير العشوائي x يمثل نجاح التجربة او فشلها فان هذا المتغير يسمى متغير برنولي وتوزيعه الاحتمالي يسمى بتوزيع برنولي .

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{Bmatrix} p^x q^{1-x} & , & x = 0,1; p + q = 1 \\ 0 & , & o.w. \end{Bmatrix}$$

حيث ان $o.w.$ تعني الحالات الاخرى ، احتمالية النجاح $p(x=1) = p$ ، احتمالية الفشل q $p(x=0) = 1 - p = q$ ونرمز لهذا التوزيع $x \sim Ber(p)$.

<u>نظرية</u> : إذا كان x متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع برنولي فان :

$$1 - E(x) = p$$

$$2 - v(x) = pq$$

$$3 - M_x(t) = q + pe^t$$