<u>البرهان</u> : 1− التوقع لتوزيع برنولي

$$E(x) = \mu_x = \sum_{x=0}^{1} x p_x(x) = \sum_{x=0}^{1} x p^x q^{1-x}$$

$$= 0 p^0 q^{1-0} + 1 p^1 q^{1-1}$$

$$= 0 + p = p$$

2− التباين لتوزيع برنولي

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p_x(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x q^{1-x}$$

$$= 0 p^0 q^{1-0} + 1 p^1 q^{1-1}$$

$$= 0 + p = p$$

بما ان

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$(E(x))^2 = p^2$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

3− دالة توليد العزوم لتوزيع برنولي

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p_x(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p^x q^{1-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (pe^t)^x q^{1-x}$$

$$= (q + pe^t)$$

<u>مثال (22) :</u>

في تجربة رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة ، فاذا كان x يمثل ظهور (H) الصورة ، فإنها تتبع توزيع برنولي ويمكن إيجاد احتمالية الفشل $q = \frac{1}{2}$ واحتمالية النجاح $p = \frac{1}{2}$.

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & , \quad x = 0,1 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{1-x} & , \quad x = 0,1 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

$$p = p(X = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

$$q = p(X = 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

$$p = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$$

1 – 13- 2 ثانياً: توزيع ذي الحدين: Binomial Distribution:

ان تجربة ذي الحدين تحتوي على:

1. **تتضمن التجربة n من المحاولات.**
2. **كل محاولة من المحاولات لها نتيجتان ممكنتان فقط هما نجاح أو فشل.**
3. **احتمال النجاح وليكن p ثابت من محاولة الى اخرى وعليه فان احتمال الفشل** $q = 1 - p$.
4. **جميع المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.**

ومثال لتجربة ذي الحدين عند رمي قطعة نقود معدنية n من المرات حيث ان المتغير العشوائي x يمثل عدد الصور الممكن الحصول عليها فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x) = p(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , \quad x = 0,1,,2,\dots,n \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

وان
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ونلاحظ ان تسمية ذي الحدين راجع الى الاحتمالات المناظرة للقيم التي من الممكن ان يأخذها المتغير العشوائي x وهي: $x = 0,1,,2,\dots,n$.

وهي الحدود المتتالية من مفكوك ذي الحدين أي ان :

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} =$$
$$= \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} + \binom{n}{1} p\ q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} p^n q^{n-n}$$
$$= q^n + \binom{n}{1} p\ q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \dots + p^n$$

ملاحظة:

1- $p_x(x) = p(X=x) \geq 0; \forall x = 0,1,,2,\dots,n$

2-
$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$

نظرية:

اذا كان x متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين بالمعلمتين n, p فبرهن ان:

1- $E(x) = np$

2- $V(x) = npq$

3- $M_x(t) = (q + pe^t)^n$

البرهان: 1- التوقع لتوزيع ذي الحدين:

$$E(x)=\sum_{x=0}^{n} xp(x)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}\frac{xn(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!}pp^{x-1}q^{n-x}$$

$$=np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}=np(p+q)^{n-1}$$

$$=np(1)^{n-1}=np$$

2- التباين لتوزيع ذي الحدين:

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$E(x^2)=[E(x(x-1))]+E[x]$$

$$E(x(x-1))=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)p_x(x)=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=2}^{n}\frac{x(x-1)n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!}p^2p^{x-2}q^{n-x}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^{x-2}q^{n-x}$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}=n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2}$$

$$=n(n-1)p^2(1)^{n-2}=n(n-1)p^2$$

$$E(x^2)=[E(x(x-1))]+E[x]=n(n-1)p^2+np$$

اذن التباين

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2$$

$$=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)=npq$$

3- دالة توليد العزوم لتوزيع ذي الحدين:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p_x(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

اذا:

$$M_x(t) = (q + pe^t)^n$$

مثال(23):

اذا كان المتغير العشوائي x يمثل عدد مرات ظهور الصورة في تجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة 3 مرات ما هو فضاء العينة لهذه التجربة وما هي دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين للمتغير العشوائي x ؟.

الحل:

ان المتغير العشوائي x يمثل ظهور الصورة ويتبع توزيع ذي الحدين وان $n = 3$

، $p = \frac{1}{2}$ ، $q = \frac{1}{2}$ ، $x = 0,1,2,3$ ،

أن فضاء العينة في هذه التجربة هو:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{3-x} & , \quad x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

$$p(X = 0) = \binom{3}{0} (\tfrac{1}{2})^0 (\tfrac{1}{2})^{3-0} = (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{2^3} = \tfrac{1}{8}$$

$$p(X = 1) = \binom{3}{1} (\tfrac{1}{2})^1 (\tfrac{1}{2})^{3-1} = 3(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{3}{2^3} = \tfrac{3}{8}$$

$$p(X=2)=\binom{3}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^{3-2}=3(\tfrac{1}{2})^3=\tfrac{3}{2^3}=\tfrac{3}{8}$$

$$p(X=3)=\binom{3}{3}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^{3-3}=(\tfrac{1}{2})^3=\tfrac{1}{2^3}=\tfrac{1}{8}$$

$$E(x)=np=3(\tfrac{1}{2})=1.5$$

$$V(x)=npq=3(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})=\tfrac{3}{4}=0.75$$

مثال(24):

اذا كان المتغير العشوائي x يمثل ظهور 5 مرات أوجه الصورة في تجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة 8 مرات ما هي دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين للمتغير العشوائي x ؟.

الحل:

ان المتغير العشوائي x يمثل ظهور الصورة ويتبع توزيع ذي الحدين وان $n=8$ ، $x=5$ ، $p=\frac{1}{2}$ ، $q=\frac{1}{2}$

فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x)=p(X=x)=\begin{cases}\binom{8}{x}(\tfrac{1}{2})^x(\tfrac{1}{2})^{8-x} & , \quad x=0,1,2,\dots,8\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

وبالتالي فأن احتمالية ظهور 5 مرات أوجه الصورة في التجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة 8 من المرات

$$p(X=5)=\binom{8}{5}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^{8-5}=\tfrac{8!}{5!(8-5)!}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^3$$
$$=\tfrac{8\times7\times6}{3\times2}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^3=\tfrac{8\times7\times6}{3\times2}\times(\tfrac{1}{32})(\tfrac{1}{8})$$
$$=(\tfrac{7}{32})=0.21875=\tfrac{56}{256}$$

$$E(x)=np=8(\tfrac{1}{2})=4$$

$$V(x)=npq=8(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})=2$$

مثال(25):

اذا علمت بان 0.1 من السيارات التي ينتجها مصنع ما بها خلل ، فإذا اشترى احد معارض بيع السيارات 4 سيارات فأوجد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي بها خلل ؟.

الحل:

ليكن x متغير عشوائي يمثل عدد السيارات التي بها خلل، فأن هذا المتغير يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بمعلمتين n , p

$$n=4, p=0.1=\tfrac{1}{10}; q=0.9=\tfrac{9}{10}$$

فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x)=p(X=x)=\begin{cases}\binom{4}{x}(\tfrac{1}{10})^x(\tfrac{9}{10})^{4-x} & , \quad x=0,1,2,3,4\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

والجدول الاتي يبين قيم التي من الممكن ان يأخذها المتغير العشوائي x والاحتمالات المناظرة لها:

x	0	1	2	3	4
P(x)	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001