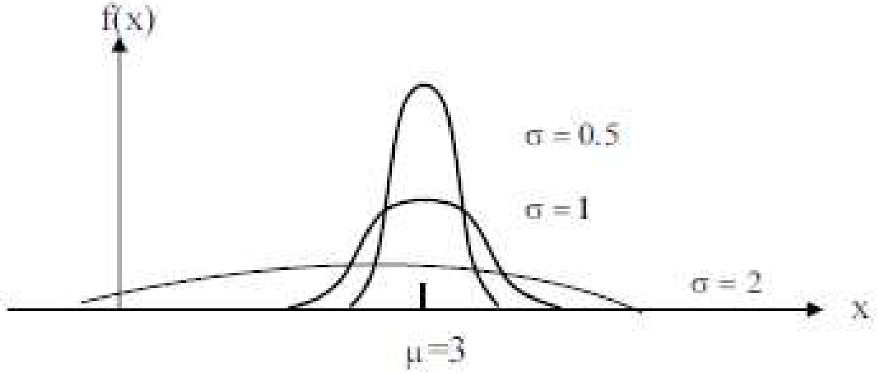
دالة كثافة الاحتمال لثلاث توزيعات طبيعية عندما $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 ; \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$



شكل (3) ثلاث توزيعات طبيعية مختلفة التباينات ومتساوية المتوسطات

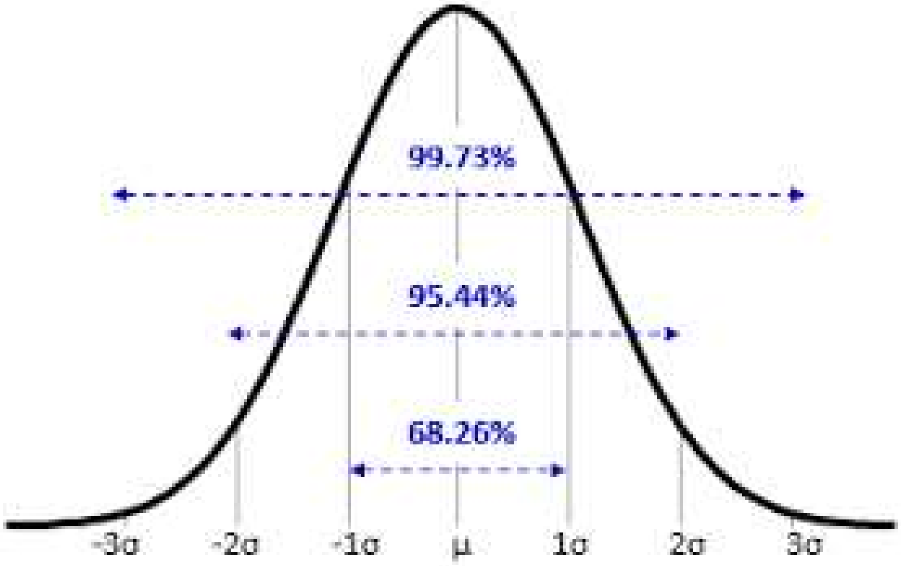
دالة كثافة الاحتمال لثلاث توزيعات طبيعية عندما $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 ; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$

8- توجد نسب معينة من المساحة الواقعة ضمن أي عدد من الانحرافات المعيارية فمثلاً:

المساحة الواقعة ضمن انحراف معياري واحد عن المتوسط تساوي 68.73% من المساحة الكلية.

المساحة الواقعة ضمن انحرافين معياريين عن المتوسط تساوي 95.44% من المساحة الكلية.

المساحة الواقعة ضمن ثلاث انحرافات معيارية عن المتوسط تساوي 99.73% من المساحة الكلية كما بالشكل ادناه.



شكل (4) النسب المئوية من المساحة الواقعة ضمن عدد معين من الانحراف المعياري

<u>معالم هذا التوزيع:</u>

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما : الوسط الحسابي $E(x)=\mu$ والتباين σ^2 ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز $x \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$:

ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 .

<u>نظرية</u>: اذا كان المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 . $x \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ فان:

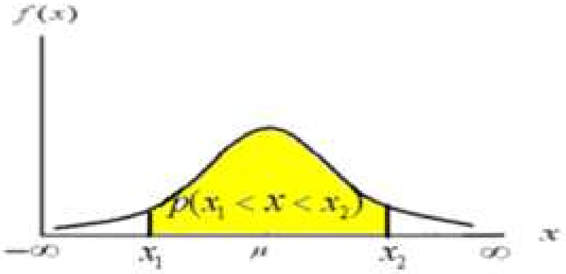
$$1-\ E(x)=\mu$$

$$2-\ V(x)=\sigma^2$$

البرهان: غير مطلوب.

<u>كيفية حساب الاحتمالات:</u>

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1<x<x_2)$ وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



شكل (5) الاحتمالية $p(x_1 < x < x_2)$

وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

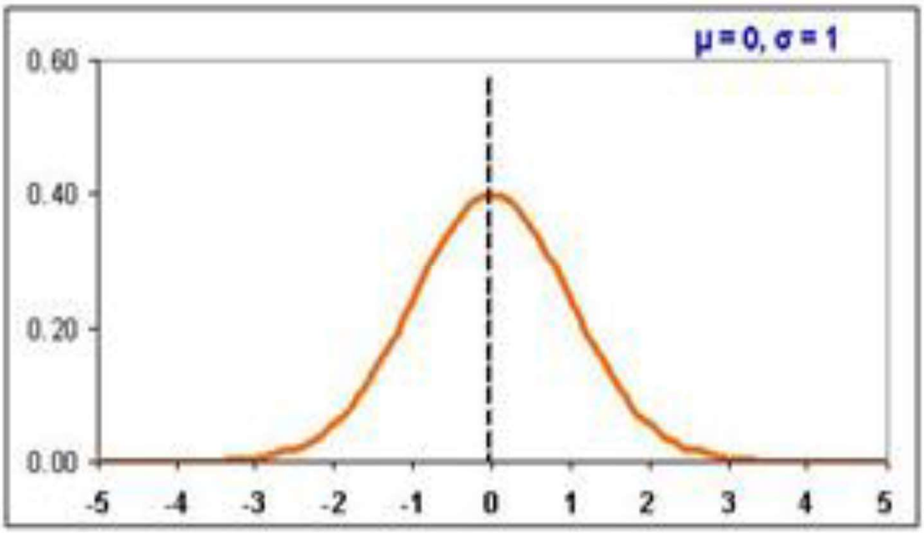
وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

ويعرف المتغير الجديد بـ Z وهو المتغير الطبيعي القياسي أو المعياري.

ثانياً:التوزيع الطبيعي القياسي(المعياري) Standard Normal Distribution

كما تعلم فإن منحنى التوزيع الطبيعي يُعرَّف بالمتوسط μ والانحراف المعياري σ وقد يأخذ المتوسط أي قيمة ويأخذ الانحراف المعياري أي قيمة موجبة. أما منحنى التوزيع الطبيعي القياسي فهو توزيع طبيعي له متوسط يساوي الصفر $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 1$ (انحراف معياري يساوي واحد $\sigma = 1$)أي ان: $Z \sim N(0,1)$ ، وان المساحة الكلية تحت المنحني الطبيعي القياسي تساوي واحد.



شكل (6) منحني التوزيع الطبيعي القياسي

ان دالة التوزيع الطبيعي القياسي(المعياري) متناظرة(متماثلة) حول النقطة $\mu = x = 0$ **.وبالتالي تكون المساحة تحت منحني التوزيع يمين المستقيم** $\mu = 0$ **تساوي 0.5 وكذلك المساحة تحت منحني التوزيع الى يسار المستقيم** $\mu = 0$ **تساوي 0.5 ايضاً. ان جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري يعطي** $p(0 < Z < a)$ **حيث ان** $Z \sim N(0,1)$ **،** $a > 0$ **اما الاحتمالات المناظرة للقيم السالبة فيتم حسابها بالتماثل وعليه يكون:**

1 - $p(-\infty < Z < a) = 0.5 + p(0 < Z < a)$

2- $p(0 < Z < a) = p(-a < Z < 0)$

3- $p(|Z| < a) = p(-a < Z < a) = 2p(0 < Z < a)$

4- $p(|Z| > a) = 2p(Z > a) = 2[0.5 - p(0 < Z < a)]$

ملاحظة: اذا كان ان $Z \sim N(0,1)$ **،** $a_1, a_2 > 0; a_2 > a_1$

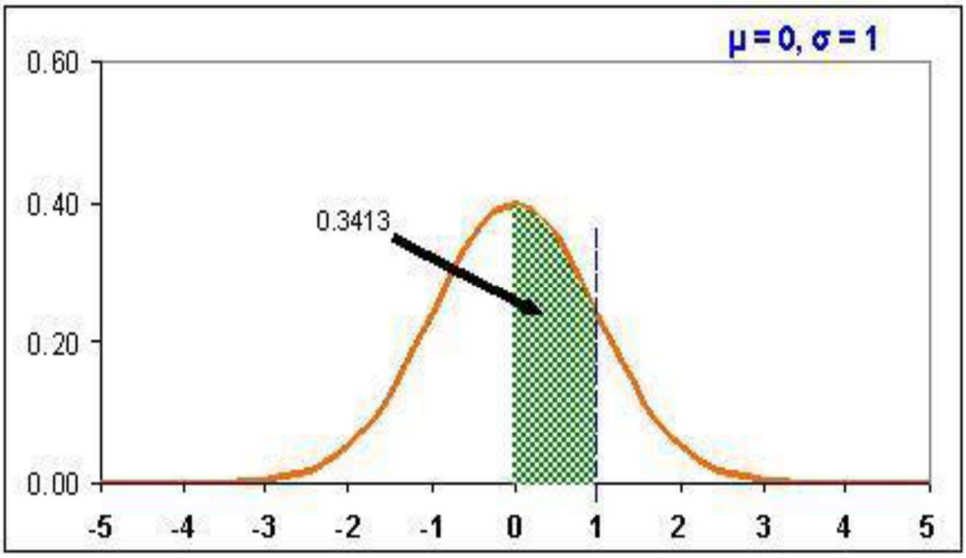
$$p(a_1 < Z < a_2) = p(Z < a_2) - p(Z \leq a_1)$$

مثال(27): اذا كان Z **متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب** $p(0 < Z < 1)$ **؟.**

الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(0 < Z < 1) = 0.3413$$

كما هو واضح بالشكل ادناه

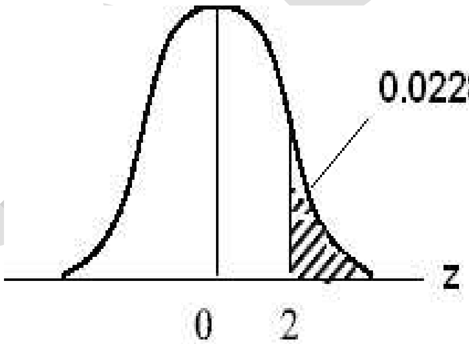


شكل (7) $p(0<Z<1)=0.3413$

مثال(28): اذا كان Z **متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب** $p(Z>2)$ ؟.

الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(Z>2)=0.5-p(0<Z<2)=0.5-0.4772=0.0228$$



شكل (8) $p(Z>2)$

مثال(29): اذا كان Z **متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب** $p(Z>0.41)$ ؟.

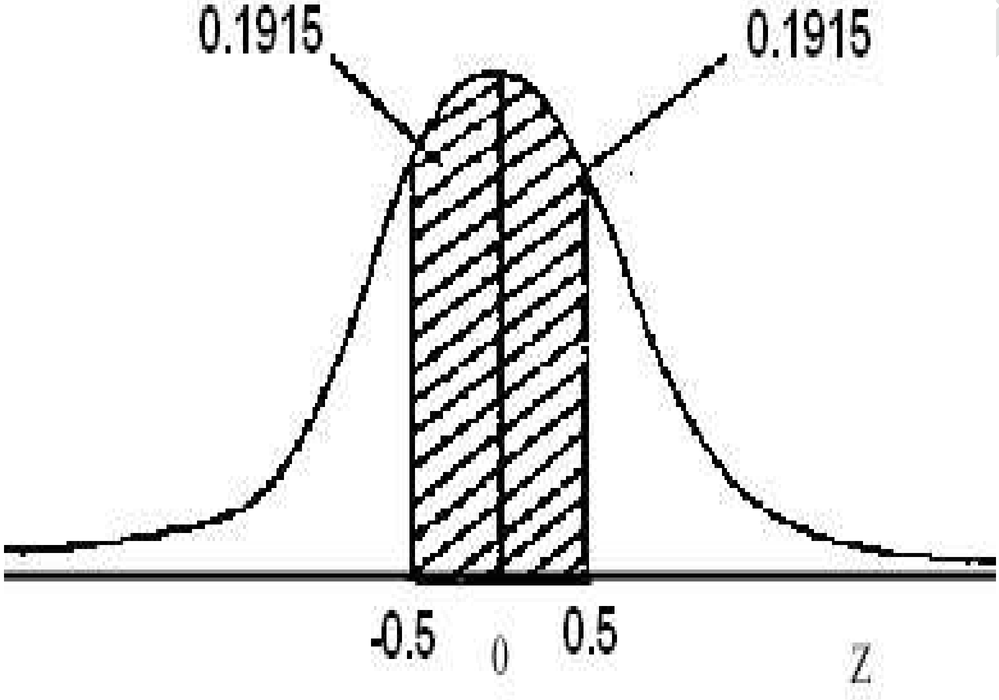
الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(Z>0.41)=0.5-p(0<Z<0.41)=0.5-0.1591=0.3409$$

مثال(30): اذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب $p(|Z|<0.5)$ ؟.

الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(|Z|<0.5)=p(-0.5<Z<0.5)=2p(0<Z<0.5)$$
$$=2(0.1915)=0.383$$

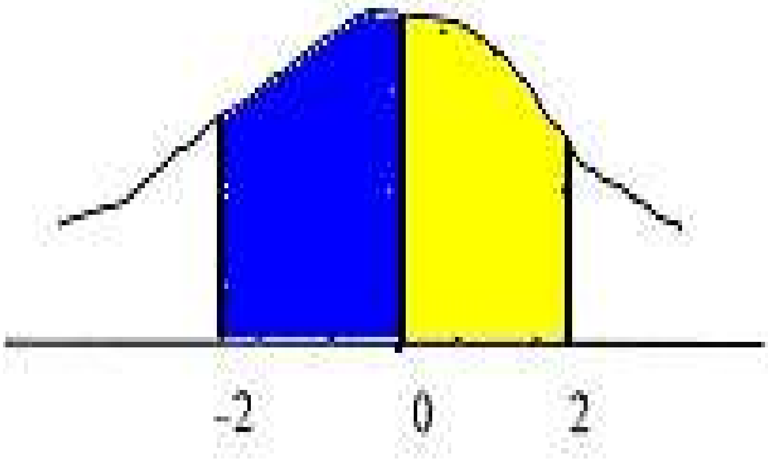


شكل (9) $p(|Z|<0.5)$

مثال(31): اذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب $p(|Z|<2)$ ؟.

الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(|Z|<2)=p(-2<Z<2)=2p(0<Z<2)$$
$$=2(0.4772)=0.9544$$



شكل **(10)** $p(|Z|<2)$

مثال(32): اذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فباستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري احسب $p(0<Z<1.65)$ ؟.

الحل: باستخدام جدول(1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري نجد ان

$$p(0<Z<1.65)=0.4505$$

مثال(33): اذا علمت ان درجات طلبة الصف الثاني في مادة الاحصاء المتقدم تتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط(معدل) $\mu=500$ درجة وانحراف معياري $\sigma=100$ درجة . فما نسبة الطلبة الذين يتحصلون على درجة اعلى من 643 درجة ؟.

الحل: