مثال(39): اذا كانت البيانات $3,5,1,7,9$ **تمثل مفردات مجتمع احصائي حجمه** $N=5$ **وتم اختيار عينة عشوائية حجمها** $n=2$ **فانه يمكن ايجاد التوزيع الاحتمالي للإحصاء متوسط العينة** $(\bar{X})$ **عندما تكون المعاينة مع الاعادة او بدون الاعادة كما يلي:**

الحل:1- نحسب التوقع والتباين للمجتمع

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{5}X_i}{N}=\frac{3+5+1+7+9}{5}=\frac{25}{5}=5$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\mu)^2$$

$$=\frac{1}{5}[(3-5)^2+(5-5)^2+(1-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2]$$

$$=\frac{1}{5}[4+0+16+4+16]=\frac{40}{5}=8$$

أ- التوقع لمتوسط العينة عندما تكون المعاينة مع الاعادة او بدون الاعادة يحسب بالقانون:

$$\mu_{\bar{X}}=E(\bar{X})=\mu=5$$

ب - تباين متوسط العينة عندما يكون عندما تكون المعاينة مع الاعادة

$$\sigma^2_{\bar{X}}=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8}{2}=4$$

وسيكون تباين متوسط العينة عندما تكون المعاينة بدون الاعادة

$$\sigma^2_{\bar{X}}=\frac{\sigma^2}{n}\frac{(N-n)}{(N-1)}=\frac{8}{2}\frac{(5-2)}{(5-1)}=3$$

2- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين حسابيين:

اذا كانت $X_1, X_2, ..., X_m$ **تمثل عينة عشوائية من مجتمع احصائي يخضع لتوزيع (منفصل او متصل) متوسطه** μ_1 **وتباينه** σ_1^2 **وكانت** $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ **عينة عشوائية من مجتمع احصائي يخضع لتوزيع (منفصل او متصل) متوسطه** μ_2 **وتباينه** σ_2^2 **وكانت العينتين مستقلتين وان** $\bar{X}$ **ترمز لمتوسط العينة الاولى وان** $\bar{Y}$ **ترمز لمتوسط العينة الثانية وكان حجم العينة كبيراً فأن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين العينتين يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط** $\mu_1 - \mu_2$ **وتباين**

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}$$

أي ان:

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}})$$

وعليه فأن:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}} \sim N(0,1)$$

مثال(40):

اذا علمت ان الانتاج السنوي لاحد مناجم الذهب يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $\mu_1 = 150$ **طن وانحراف معياري يساوي** $\sigma_1 = 20$ **طن بينما الانتاج السنوي لمنجم اخر يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي** $\mu_2 = 125$ **طن وانحراف معياري يساوي** $\sigma_2 = 25$ **طن فإذا تم اختيار عينة من انتاج خمسة اشهر للمنجم الاول وعينة من انتاج خمسة اشهر للمنجم الثاني فما احتمال:**

أ- ان يكون متوسط عينة الانتاج من المنجم الاول اصغر من او يساوي متوسط عينة الانتاج من المنجم الثاني .

ب-ان يكون الفرق ما بين متوسطي عينتي الانتاج أكبر من او يساوي 60 طن.

جـ – ان يكون الفرق ما بين متوسطي عينتي الانتاج لا يقل عن 50 طن ولا يزيد عن 65 طن

<u>الحل</u>: بفرض ان $\bar{X}$ **تمثل متوسط عينة الانتاج من المنجم الاول ،** $m=5$

وان $\bar{Y}$ **تمثل متوسط عينة الانتاج من المنجم الثاني ،** $n=5$

فأن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطي العينتين $\bar{X}\text{-}\bar{Y}$ **سيتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط** $\mu_1-\mu_2=150-125=25$ **وتباين**

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}=\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}=\frac{(20)^2}{5}+\frac{(25)^2}{5}$$

$$=\frac{400}{5}+\frac{625}{5}$$

$$=80+125=205$$

وعليه فان

$$Z=\frac{(\bar{X}\text{-}\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}}=\frac{(\bar{X}\text{-}\bar{Y})-25}{\sqrt{205}}=\frac{(\bar{X}\text{-}\bar{Y})-25}{14.32}\sim N(0,1)$$

وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات المطلوبة وباستخدام جدول (1) الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري وكما يلي:

أ–

$$p(\bar{X} \le \bar{Y}) = p(\bar{X} - \bar{Y} \le 0) = p(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}} \le \frac{0-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}})$$

$$= p(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(25)}{14.32} \le \frac{0-(25)}{14.32}) = p(Z \le -1.75)$$

$$= 0.5 - p(0 \le Z \le 1.75) = 0.5 - 0.4599 = 0.0401$$

ب-

$$p(\bar{X} - \bar{Y} \ge 60) = p(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}} \ge \frac{60-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}})$$

$$= p(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(25)}{14.32} \ge \frac{60-(25)}{14.32}) = p(Z \ge 2.44)$$

$$= 0.5 - p(0 \le Z \le 2.44) = 0.5 - 04927 = 0.073$$

جـ -

$$p(50 \le \bar{X} - \bar{Y} \le 65) = p(\frac{50-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}} \le \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}} \le \frac{65-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}}}})$$

$$= p(\frac{50-(25)}{14.32} \le \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(25)}{14.32} \le \frac{65-(25)}{14.32}$$

$$= p(1.75 \le Z \le 2.79) == p(Z \le 2.79) - p(Z \le 1.75)$$

$$= p(0 \le Z \le 2.79) - p(0 \le Z \le 1.75) = 0.4974 - 0.4599 = 0.0375$$

<u>الواجبات+الحل المحاضرة الاولى:</u>

<u>س1/</u> في تجربة رمي قطعة زهرة نرد مرة واحدة اذا كان الحادثان

ظهور عدد فردي $= \{1,3,5\} = A$

$B = \{2\} =$ **ظهور2**

احسب كلا مما يلي: فضاء العينة S ،

$p(A \cup B); p(A \cap B)$ ، $p(B)$ ، $p(A)$

س2/ عند رمي قطعة نقود معدنية ثلاث مرات فأن فضاء العينة هو

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ **فاذ**

ا فرضنا ان المتغير العشوائي X **يمثل عدد الصور التي ستظهر فجد كلا مما يلي:**

$X(HHH) =; X(HHT) =; X(HTH) =; X(THH) =$

$X(HTT) =; X(THT) =; X(TTH) =; X(TTT) =$

واذا فرضنا ان المتغير العشوائي Y **يمثل عدد الكتابة التي ستظهر فجد كلا مما يلي:**

$Y(HHH) =; Y(HHT) =; Y(HTH) =; Y(THH) =$

$Y(HTT) =; Y(THT) =; Y(TTH) =; Y(TTT) =$

<u>س1/ الحل</u>:

$A = \{1,3,5\} =$ **ظهور عدد فردي**

$B = \{2\} =$ **ظهور2**

$A \cup B = \{1,3,5,2\}; A \cap B = \{\}$

$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(B) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$

$p(A \cup B) = \frac{n}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; p(A \cap B) = 0$

س2/ الحل: عند رمي قطعة نقود معدنية ثلاث مرات فأن فضاء العينة هو

اذا $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور التي ستظهر فان:

$$X(HHH)=3; X(HHT)=2; X(HTH)=2; X(THH)=2$$

$$X(HTT)=1; X(THT)=1; X(TTH)=1; X(TTT)=0$$

واذا كان المتغير العشوائي Y يمثل عدد الكتابة التي ستظهر فان:

$$Y(HHH)=0; Y(HHT)=1; Y(HTH)=1; Y(THH)=1$$

$$Y(HTT)=2; Y(THT)=2; Y(TTH)=2; Y(TTT)=3$$

واجبات المحاضرة الثانية

س1/ اذا كانت دالة التوزيع للمتغير المستمر x معرفة كما يلي:

$$F(x)=\begin{Bmatrix} x(x^2+1) & if & x \ge 0 \\ 0 & if & x<0 \end{Bmatrix}$$

جد دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ؟.

س2/ اذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} ax^2 & ;1 \le x \le 2 \\ a & ;2 \le x \le 3 \\ ax & ;3 \le x \le 4 \\ 0 & ;o.w. \end{Bmatrix}$$

حيث ان $o.w.$ تعني الحالات الاخرى، وان a هو مقدار ثابت، اوجد قيمة الثابت a ثم اوجد $p(x \le 2.5)$ ؟.

س1/:

الحل: ان دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ هي مشتقة دالة التوزيع $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} x(x^2+1) & if \quad x\geq 0 \\ 0 & if \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^3+x & if \quad x\geq 0 \\ 0 & if \quad x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\begin{cases} x^3+x & if \quad x\geq 0 \\ 0 & if \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} 3x^2+1 & if \quad x\geq 0 \\ 0 & if \quad x<0 \end{cases}$$

س2/ الحل بما ان

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & ;1\leq x\leq 2 \\ a & ;2\leq x\leq 3 \\ ax & ;3\leq x\leq 4 \\ 0 & ;o.w. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1=\int_1^2 (ax^2)dx+\int_2^3 (a)dx+\int_3^4 (ax)dx=1$$

$$=a\int_1^2 x^2dx+a\int_2^3 dx+a\int_3^4 xdx=1$$

$$=a[\tfrac{x^3}{3}]_1^2+a[x]_2^3+a[\tfrac{x^2}{2}]_3^4=1$$

$$=\tfrac{a}{3}[8-1]+a[3-2]+\tfrac{a}{2}[16-9]=1$$

$$=\tfrac{7a}{3}+a+\tfrac{7a}{2}=1=\tfrac{(14+6+21)a}{6}=1$$

$$=\tfrac{41a}{6}=1;\Rightarrow a=\tfrac{6}{41}=0.1463$$