$$p(x \le 2.5) = p(-\infty < x \le 2.5) = \int_{-\infty}^{2.5} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} ax^2 dx + \int_{2}^{2.5} a dx =$$

$$= 0 + a\int_{1}^{2} x^2 dx + a\int_{2}^{2.5} dx$$

$$= a[\tfrac{x^3}{3}]_1^2 + a[x]_2^{2.5}$$

$$= \tfrac{a}{3}[x^3]_1^2 + a[x]_2^{2.5}$$

$$= \tfrac{a}{3}[8-1] + a[2.5-2]$$

$$= \tfrac{7a}{3} + a[0.5] = \tfrac{7a}{3} + a[\tfrac{1}{2}]$$

$$= \tfrac{(14+3)a}{6} = \tfrac{(17)a}{6} = \tfrac{(17)}{6}\tfrac{6}{41} = \tfrac{17}{41} = 0.4146$$

<u>واجبات المحاضرة الثالثة+الحل</u>

<u>س1/</u>

اذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة <u>كثافة</u> الاحتمال $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & , \quad 2 < x < 3 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

فجد القيمة المتوقعة $E(x) = \mu$ للمتغير العشوائي x ؟.

<u>س2/</u> اذا كان x متغير عشوائي متقطع له دالة <u>كتلة</u> الاحتمال $p_x(x)$ معرفة كما يلي:

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

باحتمالات متساوية اوجد الانحراف المعياري والتباين للدالة $g(x) = 2x + 7$ ؟.

<u>الحلول</u>

س1/ **الحل: بما ان x متغير عشوائي مستمر له دالة <u>كثافة</u> الاحتمال $f(x)$ فاننا ناخذ التكامل**

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{2}^{3} x(3x)dx = 3\int_{2}^{3} x^2 dx = \tfrac{3}{3}[x^3]_2^3 = 27 - 8 = 19$$

س2/ **الحل: بما ان x متغير عشوائي متقطع له دالة <u>كتلة</u> الاحتمال $p_x(x)$ فسنأخذ المجموع**

$$E(x) = \sum_x xp_x(x) = \sum_{x=1}^{4} x(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}(1+2+3+4) = \tfrac{1}{4}(10) = \tfrac{10}{4} = 2.5$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 p_x(x) = \sum_{x=1}^{4} x^2(\tfrac{1}{4}) = (\tfrac{1}{4})[1+4+9+16] = \tfrac{30}{4} = 7.5$$

التباين

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \tfrac{30}{4} - \tfrac{100}{16} = \tfrac{120-100}{16} = \tfrac{20}{16} = 1.25$$

التباين للدالة $g(x) = 2x + 7$

$$V(g(x)) = V(2x+7) = 4V(x) + 0 = 4.(\tfrac{20}{16}) = \tfrac{80}{16} = 5$$

الانحراف المعياري (جذر التباين)

$$\sigma_{g(x)} = \sqrt{5} = 2.236$$

<u>واجبات المحاضرة الرابعة+الحل</u>

س1/ إذا كان x متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع برنولي فبرهن ان :

$$1 - E(x) = p$$

$$2 - v(x) = pq$$

$$3 - M_x(t) = q + pe^t$$

س2/

اذا كان المتغير العشوائي x يمثل عدد مرات ظهور الصورة في تجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة مرتين ما هو فضاء العينة لهذه التجربة ، وما هي دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين للمتغير العشوائي x ؟.

س3/

اذا كان المتغير العشوائي x يمثل ظهور 3 مرات أوجه الصورة في تجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة 5 مرات ، ما هي دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين للمتغير العشوائي x ؟.

الحلول

س1/1- التوقع لتوزيع برنولي

$$E(x) = \mu_x = \sum_{x=0}^{1} x p_x(x) = \sum_{x=0}^{1} x p^x q^{1-x}$$

$$= 0 p^0 q^{1-0} + 1 p^1 q^{1-1}$$

$$= 0 + p = p$$

2- التباين لتوزيع برنولي

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2)=\sum_{x=0}^{1}x^2p_x(x)=\sum_{x=0}^{1}x^2p^xq^{1-x}$$
$$=0p^0q^{1-0}+1p^1q^{1-1}$$
$$=0+p=p$$

بما ان

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$
$$(E(x))^2=p^2$$
$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

3- دالة توليد العزوم لتوزيع برنولي

$$M_x(t)=E[e^{tx}]=\sum_{x=0}^{1}e^{tx}p_x(x)=\sum_{x=0}^{1}e^{tx}p^xq^{1-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{1}(pe^t)^xq^{1-x}$$
$$=(q+pe^t)$$

س2/ ان المتغير العشوائي x يمثل ظهور الصورة ويتبع توزيع ذي الحدين وان $n=2$
، $p=\frac{1}{2}$ ، $q=\frac{1}{2}$ ، $x=0,1,2$ ،

أن فضاء العينة في هذه التجربة هو:

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}$$

فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x)=p(X=x)=\begin{cases}\binom{2}{x}(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{2})^{2-x} & , \quad x=0,1,2\\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

$$E(x)=np=2(\tfrac{1}{2})=1$$

$V(x) = npq = 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} = 0.5$

س3/ ان المتغير العشوائي x يمثل ظهور الصورة ويتبع توزيع ذي الحدين وان $n = 5$ ،
$q = \tfrac{1}{2}$ ، $p = \tfrac{1}{2}$ ، $x = 3$

فأن دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي:

$$p_x(x) = p(X = x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(\tfrac{1}{2})^x(\tfrac{1}{2})^{5-x} & , \quad x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

وبالتالي فأن احتمالية ظهور 3 مرات أوجه الصورة في التجربة رمي قطعة نقود معدنية متزنة 5 من المرات

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^{5-3} = \tfrac{5!}{3!(5-3)!}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^2$$
$$= \tfrac{(5\times4).3!}{3!.2!}(\tfrac{1}{8})(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{10}{1}\times(\tfrac{1}{32})$$
$$= (\tfrac{10}{32}) = 0.3125$$

$E(x) = np = 5(\tfrac{1}{2}) = 2.5$

$V(x) = npq = 5(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4} = 1.25$

<u>واجبات +الحل المحاضرة الخامسة</u>

<u>س1/</u> اذا كان x متغير عشوائي يتبع توزيع بوسون بالمعلمة λ ، $x \sim \mathrm{p}(\lambda)$ فبرهن ان:

1- $E(x) = \lambda$

2- $V(x) = \lambda$

3- $M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

<u>س2/</u>

لوحظ ان هنالك 1 بكتريا لكل سنتمتر من الماء المأخوذ من مستنقع معين في نموذج من ماء ذلك المستنقع حجمه 2 سنتمتر مكعب احسب احتمالية ان يحتوي هذا النموذج

2- في الاكثر 3 بكتريا. 2- في الاقل 3 بكتريا.

س3/

اذا فرضنا ان x متغير عشوائي يتبع توزيع بوسون ، وان $\lambda = 2$ فجد دالة كتلة الاحتمال للمتغير x ، وما هي $p(x \leq 2)$ ؟.

الحلول

س1/1- التوقع لتوزيع بوسون:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x p_x(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \lambda \lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

2- التباين لتوزيع بوسون:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = [E(x(x-1))] + E[x]$$

$$[E(x(x-1))] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) p_x(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)}{x(x-1)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^2\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 .1 = \lambda^2$$

$$E(x^2) = [E(x(x-1))] + E[x] = \lambda^2 + \lambda$$

اذن التباين

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda$$

3- دالة توليد العزوم لتوزيع بوسون:

$$M_x(t)=E[e^{tx}]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}p_x(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\tfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\tfrac{(\lambda e^t)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{(\lambda e^t)}=e^{\lambda(e^t-1)}=\exp(\lambda(e^t-1))$$

اذا:

$$M_x(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

س2/ الحل:

لنفرض ان x يمثل عدد البكتريا الموجودة في النموذج ولما كان x يأخذ قيما غير محددة من وحدة حجمية فمن المعقول ان نفرض ان x يتبع توزيع بوسون.

ولما كان هنالك 1 بكتريا لكل سنتمتر من الماء فبالمعدل والتناسب سيكون لدينا 2 بكتريا لكل سنتمتر من الماء أي ان $\lambda=2$.

$$p_x(x)=p(X=x)=\begin{cases}\frac{2^x e^{-2}}{x!} & , \quad x=0,1,2,3,\ldots \\ 0 & , \quad o.w.\end{cases}$$

3- في الاكثر 3 بكتريا

$$\begin{aligned}&p(x\le 3)=\\&=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)\\&=0.135+0.27+0.27+0.18=0.86\end{aligned}$$

4- في الاقل 3 بكتريا