الفصل الأول

المتجهات (Vectors)

((1))

1-1 الكميات الفيزيائية (Physical Quantities)

أ- الكميات القياسية (Scalar Quantities)

ب- الكميات الإتجاهية (Vector Quantities)

1-2 المتجهات (Vectors)

1-2-1 متجه الوحدة (Unit Vector)

1-2-2 متجهات الوحدة الأساسية ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) (Basic Unit Vectors)

1-2-3 جمع وطرح المتجهات (Addition and Subtraction of Vectors)

1-2-3-1 طريقة الرسم (Graphical Method)

1-2-3-2 الطريقة التحليلية (Analytic Method)

1-2-4 تساوي المتجهات (Equality of Vectors)

1-2-5 ضرب المتجهات (Multiplication of Vectors)

1-2-5-1 الضرب القياسي للمتجهات (Dot or Scalar product of Vectors)

1-2-5-2 الضرب الإتجاهي للمتجهات (Cross or Vector product of Vectors)

الفصل الأول

المتجهات (Vectors)

1-1 الكميات الفيزيائية (Physical Quantities)

بصورة عامة تُقسّم الكميات الفيزيائية إلى نوعين هما :-

أ- الكميات القياسية (Scalar Quantities)

وهي الكميات التي تُعرّف من خلال مقدارها (Magnitude) فقط ، ومن أمثلتها الشغل والزمن والكتلة ، ويُمكن أن تخضع لعمليات الجبر الإعتيادية عند الجمع والطرح .

ب- الكميات الإتجاهية (Vector Quantities)

وهي الكميات التي تُعرّف من خلال مقدارها (Magnitude) وإتجاهها (Direction) معاً ، ومن أمثلتها السرعة والقوة والتعجيل ، وهذه الكميات لا تخضع للعمليات الجبرية البسيطة بل تخضع للجبر الاتجاهي عند جمعها وطرحها وضربها .

2-1 المتجهات (Vectors)

1-2-1 متجه الوحدة (Unit Vector)

يُعرّف متجه الوحدة ($\hat{u}_{\vec{A}}$) في إتجاه المتجه ($\vec{A}$) كالتالي :-

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad ....(1-1)}$$

حيث أن :-

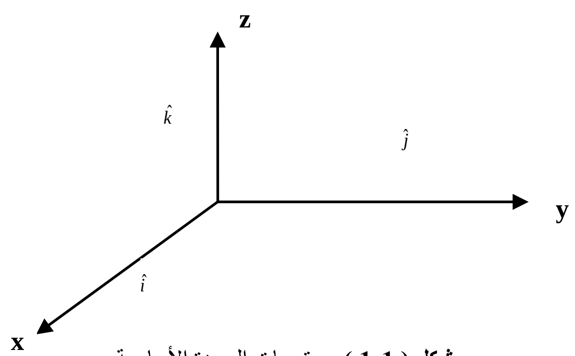
$\hat{u}_{\vec{A}}$:- متجه الوحدة في إتجاه المتجه ($\vec{A}$) .

$\vec{A}$:- المتجه ($\vec{A}$) .

$|\vec{A}|$:- مقدار المتجه ($\vec{A}$) .

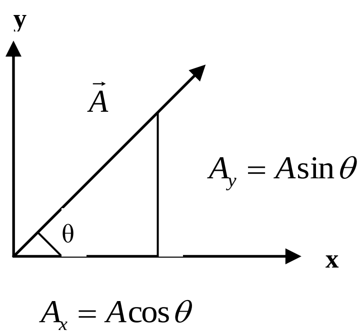
2-2-1 متجهات الوحدة الأساسية ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) (Basic Unit Vectors)

وهي متجهات مقدارها الوحدة وتعمل في الإتجاهات الموجبة للمحاور (x, y, z) على الترتيب وكما موضح في الشكل ($1-1$) وعليه فإن هذه المتجهات الثلاثة تكون متعامدة .



شكل (1-1) : متجهات الوحدة الأساسية

والآن لإيجاد مقدار المتجه في حالة المتجه ذات بعدين وكما موضح في الشكل ($2-1$) .



شكل (2-1) : متجه ذات بعدين

من الشكل ($2-1$) يتضح لنا أن :-

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} \ldots (2-1)}$$

حيث أن :-

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$

θ :- هي الزاوية التي يعملها المتجه مع محور (x) الموجب ، وتُحسب من المعادلة الآتية :

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \ldots (3-1)}$$

والآن يُمكن تعميم ذلك على المتجه في الفضاء (ذات ثلاثة أبعاد) كالتالي :-

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}} \ldots (4-1)}$$

مثال 1 - 1 :- إذا كان $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

1- إحسب مقدار المتجه ($\vec{A}$) ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) ؟

الحل :-

1 - من المعادلة (2-1) :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} \ldots(2-1)$$

حيث أن :

$$A_x = 3$$

$$A_y = 4$$

إذن :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{9+16}$$

$\boxed{\left|\vec{A}\right| = 5 \ \text{units}}$ ($\vec{A}$) مقدار المتجه

2 - من المعادلة (1-1) :

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} \ldots.(1-1)$$

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$$

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = 0.6\hat{i} + 0.8\hat{j}}$ ($\vec{A}$) متجه الوحدة في إتجاه

1-2-3 جمع وطرح المتجهات (Addition and Subtraction of Vectors)

يمكن جمع أو طرح المتجهات بإحدى الطريقتين :-

1-2-3-1 طريقة الرسم (Graphical Method)

في هذه الطريقة نرسم المتجه الأول بمقياس رسم مناسب ، ومن نهاية المتجه الأول نرسم المتجه الثاني وبنفس مقياس الرسم ، وهكذا نكرّر ذلك بالنسبة لبقية المتجهات .

إن محصلة (Resultant) هذه المتجهات يُمثلها مقداراً وإتجاهاً المتجه الواصل من نقطة البداية للمتجه الأول إلى نقطة النهاية للمتجه الأخير .

1-2-3-2 الطريقة التحليلية (Analytic Method)

بالرجوع إلى الشكل (1-1) نجد أن المتجه ($\vec{A}$) ذات بعدين يمكن كتابته بدلالة مركباته كالآتي :-

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}...(5-1)}$$

وبتعميم ذلك على المتجه في الفضاء (ذات ثلاثة أبعاد) فإن المتجه ($\vec{A}$) يمكن كتابته على الشكل التالي :-

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}...(6-1)}$$

وبالمثل بالنسبة للمتجه ($\vec{B}$) :-

$$\boxed{\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}...(7-1)}$$

بالتالي ومن المعادلتين (1-6) و (1-7) يمكن كتابة معادلة جمع المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) وكالآتي :

$$\boxed{\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}...(8-1)}$$

أما معادلة طرح المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) فتكون كالآتي :

$$\boxed{\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}...(9-1)}$$

يتّضح من هذه الطريقة (التحليلية) إنه قبل إجراء عملية جمع أو طرح المتجهات يجب إتباع ما يلي :-

1- كتابة كل متجه بدلالة مركباته .

2- جمع أو طرح المُركبات المُتقابلة للمتجه.

4-2-1 تساوي المتجهات (Equality of Vectors)

إذا كان :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

فإن :

$$\vec{A} - \vec{B} = 0$$

أي أن :

$$(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} = 0$$

أي أن :

$$A_x - B_x = 0$$
$$A_y - B_y = 0$$
$$A_z - B_z = 0$$

وبذلك فإن :

$$A_x = B_x$$
$$A_y = B_y$$
$$A_z = B_z$$

مما سبق نستنتج بأنه يُمكن أن يتساوى المتجهان إذا كانت مُركباتهما المتقابلة متساوية .

مثال 1 - 3 : أوجد قيم كل من x , y , z والتي تجعل المتجهين الآتيين متساويين :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k}$$
$$\vec{B} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

الحل :-

بما أنه المطلوب أن يتساوى المتجهان أي أن :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

وأن :

$$\hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

وبالتالي يتساوى المركبات المتقابلة للمتجهين :

$$1 = (x-3)^2$$
$$2 = y$$
$$3z = 1$$

وعليه فإن :

$$\boxed{x = 4}$$
$$\boxed{y = 2}$$
$$\boxed{z = \frac{1}{3}}$$

5-2-1 ضرب المتجهات (Multiplication of Vectors)

يُوجد هُناك نوعان من ضرب المتجهات وهما : -

1-5-2-1 الضرب القياسي للمتجهات (Dot or Scalar product of Vectors)

يعرّف الضرب القياسي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(10-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما وتُحسب من العلاقة الآتية :

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} ...(11-1)}$$

لإيجاد الضرب القياسي $\vec{A}.\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نُعوض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\hat{i}.\hat{j} + A_xB_z\hat{i}.\hat{k} + A_yB_x\hat{j}.\hat{i} + A_yB_y\hat{j}.\hat{j} + A_yB_z\hat{j}.\hat{k} + A_zB_x\hat{k}.\hat{i} + A_zB_y\hat{k}.\hat{j} + A_zB_z\hat{k}.\hat{k} ...(12-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

بينما

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$$

وعليه فإن المعادلة (12 -1) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z ...(13-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب القياسي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}}$$

مثال 1 - 4 : إذا كان :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

إحسب : -

1- $\vec{A}.\vec{B}$ ؟

2- مقدار $\vec{A}$ ومقدار $\vec{B}$ ؟

3- الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الحل :-

1 - إيجاد حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

بإستخدام المعادلة (1- 13) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(13-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (1)(3) + (2)(0) + (-2)(-4)$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = 11}$$

2 - إيجاد مقدار كل متجه :

بإستخدام المعادلة (1- 4) :

بالنسبة للمتجه $\vec{A}$:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{A}\right| = 3 units}$$

أما بالنسبة للمتجه $\vec{B}$:

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = 5units}$$

3 - إيجاد مقدار الزاوية بين المتجهين :

بإستخدام المعادلة (1- 11) :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|A\right|\left|B\right|} \ldots(11-1)$$

$\vec{A}.\vec{B} = 11$ من خلال الفقرة (1)

$\therefore \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| = 15units$ من خلال الفقرة (2)

وبتعويض القيم الناتجة أعلاه في المعادلة (1 – 11) نحصل على :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{11}{15}$$

$\boxed{\therefore \theta = 42.8^{\circ}}$ قيمة الزاوية بين المتجهين

2-5-2-1 الضرب الإتجاهي للمتجهات (Cross or Vector product of Vectors)

يُعرّف الضرب الإتجاهي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = |A||B|\sin\theta ...(14-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما .

لإيجاد الضرب الإتجاهي $\vec{A}x\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نعوّض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})x(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = A_xB_x\hat{i}x\hat{i} + A_xB_y\hat{i}x\hat{j} + A_xB_z\hat{i}x\hat{k} + A_yB_x\hat{j}x\hat{i} + A_yB_y\hat{j}x\hat{j} + A_yB_z\hat{j}x\hat{k} + A_zB_x\hat{k}x\hat{i} + A_zB_y\hat{k}x\hat{j} + A_zB_z\hat{k}x\hat{k} ...(15-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب التقاطعي (مع الإتجاه) على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$$

بينما

$$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j}x\hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$$

و

$$\hat{i}x\hat{k} = -\hat{j} \quad \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i} \quad \hat{j}x\hat{i} = -\hat{k}$$

وعليه فإن المعادلة (1- 15) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} ...(16-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب الإتجاهي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}}$$

مثال 1 - 5 : إذا كان :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

إحسب كل من :-

1 - $2\vec{A} - 3\vec{B}$ ؟

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} - 3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\boxed{2\vec{A} - 3\vec{B} = \hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}$$

2 - مقدار $\vec{A}$ ومقدار $\vec{B}$ ؟

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{A}\right| = \sqrt{14} units}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{B}\right| = 3 units}$$

3 - الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} \ldots (11-1)$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A||B|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(2)(1) + (3)(-2) + (1)(2)}{3\sqrt{14}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-2}{3\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\therefore \theta = 100.3^\circ}$$

4 - $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} ...(16-1)$$

$$\vec{A}x\vec{B} = [(3)(2) - (1)(-2)]\hat{i} + [(1)(1) - (2)(2)]\hat{j} + [(2)(-2) - (3)(1)]\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = 8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}$$

5 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{|\vec{A}x\vec{B}|}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(8)^2 + (-3)^2 + (-7)^2}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

6 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{B}x\vec{A}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = -\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}} = -\frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

مثال 1 - 6 :- إحسب قيمة (x) التي تجعل المتجهيين التاليين متعامدين :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

الحل :-

بما أن المطلوب أن يكون المتجهان متعامدين فالزاوية بينهما تساوي ($\frac{\pi}{2} = 90^\circ$) .

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(10-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$$

$$(2)(-1) + (3)(-2) + 2x = 0$$

$$2x = 8$$

قيمة (x) التي تجعل المتجهيين متعامدين $\boxed{\therefore x = 4}$

مسائل الفصل الأول
المتجهات (Vectors)
((1))

س1 : إذا كان :

$\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

1- إحسب مقدار كل من المتجهات $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ ؟

2- إحسب مقدار $3\vec{A} - 2\vec{B}$ ؟

الإجابة : $\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{77}units}$ $\boxed{|\vec{B}| = \sqrt{17}units}$ $\boxed{|\vec{C}| = \sqrt{29}units}$ $\boxed{3\vec{A} - 2\vec{B} = 19\hat{i} + 8\hat{j} - 24\hat{k}}$

س2 : إذا كانت مركبات المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ هي :

$A_x = 3$ ، $A_y = 1.5$ $B_x = 0.5$ ، $B_y = 2$

إحسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الإجابة : $\boxed{\theta = 49.45^\circ}$

س3 : إذا كان :

$\vec{B} = 9\hat{i} + 20\hat{j} + 12\hat{k}$ و $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

1- ما هو متجه الوحدة في إتجاه $(\vec{A})$ ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه $(\vec{B})$ ؟

الإجابة : $\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = 0.6\hat{i} - 0.3\hat{j} + 0.6\hat{k}}$ $\boxed{\hat{u}_{\vec{B}} = 0.36\hat{i} + 0.8\hat{j} + 0.48\hat{k}}$

س4 : إذا كان :

$\vec{B} = 4\hat{i} + x\hat{j}$ و $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$

أوجد قيمة (x) والتي تجعل المتجهين متعامدين مع بعضهما البعض ؟

الإجابة : $\boxed{x = 8}$

س5 : إذا كان :

$\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ و $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

إحسب المتجه $(\vec{C})$ بحيث أن $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 0$ ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{C} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}}$
