اعداد

م.م. احمد محمد خضر　　　م.م. عبير ابراهيم اعشوي

المحاضرة الثانية

الفيزياء العامة

جمع وطرح المتجهات (Addition and Subtraction of Vectors)

يمكن جمع أو طرح المتجهات بإحدى الطريقتين :-

1- طريقة الرسم (Graphical Method)

في هذه الطريقة نرسم المتجه الأول بمقياس رسم مناسب ، ومن نهاية المتجه الأول نرسم المتجه الثاني وبنفس مقياس الرسم ، وهكذا نكرّر ذلك بالنسبة لبقية المتجهات .

إن محصلة (Resultant) هذه المتجهات يُمثلها مقداراً وإتجاهاً المتجه الواصل من نقطة البداية للمتجه الأول إلى نقطة النهاية للمتجه الأخير .

2- الطريقة التحليلية (Analytic Method)

بالرجوع إلى الشكل (متجها الوحدة الاساسية) نجد أن المتجه ($\vec{A}$) ذات بعدين يمكن كتابته بدلالة مركباته كالآتي :-

$$\boxed{\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} ...(5-1a)}$$

وبتعميم ذلك على المتجه في الفضاء (ذات ثلاثة أبعاد) فإن المتجه ($\vec{A}$) يمكن كتابته على الشكل التالي :-

$$\boxed{\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} ...(5-1b)}$$

وبالمثل بالنسبة للمتجه ($\vec{B}$) :-

$$\boxed{\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} ...(6-1)}$$

بالتالي ومن المعادلتين (5-1b) و (6-1) يمكن كتابة معادلة جمع المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) وكالآتي :

$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} ...(7-1)}$$

أما معادلة طرح المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) فتكون كالآتي :

$$\boxed{\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}\ldots(8-1)}$$

يتّضح من هذه الطريقة (التحليلية) إنه قبل إجراء عملية جمع أو طرح المتجهات يجب إتباع ما يلي :-

1- كتابة كل متجه بدلالة مركباته .

2- جمع أو طرح المُركبات المُتقابلة للمتجه.

تساوي المتجهات (Equality of Vectors)

إذا كان :

$$\vec{A}=\vec{B}$$

فإن :

$$\vec{A}-\vec{B}=0$$

أي أن :

$$(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}=0$$

أي أن :

$$A_x-B_x=0$$

$$A_y-B_y=0$$

$$A_z-B_z=0$$

وبذلك فإن :

$$A_x=B_x$$

$$A_y=B_y$$

$$A_z=B_z$$

مما سبق نستنتج بأنه يُمكن أن يتساوى المتجهان إذا كانت مُركباتهما المتقابلة متساوية .

مثال : أوجد قيم كل من x , y , z والتي تجعل المتجهين الآتيين متساويين :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k}$$

$$\vec{B} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

الحل :-

بما أنه المطلوب أن يتساوى المتجهان أي أن :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

وأن :

$$\hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

وبالتالي يتساوى المركبات المتقابلة للمتجهين :

$$1 = (x-3)^2$$

$$2 = y$$

$$3z = 1$$

وعليه فإن :

$$\boxed{x = 4}$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{3}}$$

ضرب المتجهات (Multiplication of Vectors)

يُوجد هُناك نوعان من ضرب المتجهات وهما : -

1- الضرب القياسي للمتجهات (Dot or Scalar product of Vectors)

يعرّف الضرب القياسي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(9-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما وتُحسب من العلاقة الآتية :

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} \ldots(10-1)}$$

لإيجاد الضرب القياسي $\vec{A}.\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نُعوض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\hat{i}.\hat{j} + A_xB_z\hat{i}.\hat{k} + A_yB_x\hat{j}.\hat{i} + A_yB_y\hat{j}.\hat{j} + A_yB_z\hat{j}.\hat{k} + A_zB_x\hat{k}.\hat{i} + A_zB_y\hat{k}.\hat{j} + A_zB_z\hat{k}.\hat{k} \ldots(11-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

بينما

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$$

وعليه فإن المعادلة (1- 11) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \ldots(12-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب القياسي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

إحسب : -

1- الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

2- الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ؟

الحل :-

1 - بإستخدام المعادلة (1- 10) :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} \ldots(10-1)$$

لغرض حساب قيمة الزاوية (θ) بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يجب حساب قيمة كل من $(\vec{A}.\vec{B}$) و $(|A||B|)$ وكالآتي :

من المعادلة (12 – 1) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (1)(3) + (2)(0) + (-2)(-4)$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = 11}$$

من المعادلة (1- 4) بالنسبة للمتجه $\vec{A}$:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$$

$$\boxed{|\vec{A}| = 3units}$$

أما بالنسبة للمتجه $\vec{B}$:

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2}$$

$$\boxed{|\vec{B}| = 5units}$$

$$\boxed{\therefore |\vec{A}||\vec{B}| = 15units}$$

وبتعويض القيم الناتجة أعلاه في المعادلة (1 – 10) نحصل على :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{11}{15}$$

قيمة الزاوية بين المتجهين $\boxed{\theta = 42.8^\circ}$

$\boxed{2}$ - لإيجاد الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ، فإننا بحاجة إلى متجهين أحدهما $\vec{A}$ والآخر في إتجاه (x) الموجب حتى نتمكن من تطبيق المعادلة (1 – 10) ، وليكن ($\hat{i}$) .

وعليه فإن المعادلة (1 – 9) تصبح :

$$\vec{A}.\hat{i} = |A|.|\hat{i}|\cos\theta$$

إذا :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\hat{i}}{|A|.|\hat{i}|}$$

من المعادلة (12 – 1) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)$$

$$\vec{A}.i = (1)(1) + (2)(0) + (-2)(0)$$

$$\boxed{\vec{A}.\hat{i} = 1}$$

من الفرع الأول $\boxed{|\vec{A}| = 3}$:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

قيمة الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب $\boxed{\theta = 70.5^{\circ}}$

2- الضرب الإتجاهي للمتجهات (Cross or Vector product of Vectors)

يُعرّف الضرب الإتجاهي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = |A||B|\sin\theta ...(13-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما .

لإيجاد الضرب الإتجاهي $\vec{A}x\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نعوّض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})x(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = A_x B_x \hat{i}x\hat{i} + A_x B_y \hat{i}x\hat{j} + A_x B_z \hat{i}x\hat{k} + A_y B_x \hat{j}x\hat{i} + A_y B_y \hat{j}x\hat{j} + A_y B_z \hat{j}x\hat{k} + A_z B_x \hat{k}x\hat{i} + A_z B_y \hat{k}x\hat{j} + A_z B_z \hat{k}x\hat{k} ...(14-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب التقاطعي (مع الإتجاه) على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$$

بينما

$$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}x\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$$

و

$$\hat{i}x\hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i} \qquad \hat{j}x\hat{i} = -\hat{k}$$

وعليه فإن المعادلة (1- 14) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} ...(15-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب الإتجاهي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

إحسب كل من :-

1 - $2\vec{A} - 3\vec{B}$ ؟

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} - 3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\boxed{2\vec{A} - 3\vec{B} = \hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}$$

2 - مقدار $\vec{A}$ ومقدار $\vec{B}$ ؟

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}$$

$$\boxed{\therefore |\vec{A}| = \sqrt{14} units}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$

$$\boxed{\therefore |\vec{B}| = 3 units}$$

3 - الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} ...(10-1)$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{|A||B|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(2)(1)+(3)(-2)+(1)(2)}{3\sqrt{14}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-2}{3\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\therefore \theta = 100.3^{\circ}}$$

4 - $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \ldots (15-1)$$

$$\vec{A}x\vec{B} = [(3)(2)-(1)(-2)]\hat{i} + [(1)(1)-(2)(2)]\hat{j} + [(2)(-2)-(3)(1)]\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = 8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}$$

5 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{|\vec{A}x\vec{B}|}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(8)^2 + (-3)^2 + (-7)^2}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

6 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{B}x\vec{A}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = -\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}} = -\frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

مثال :- إحسب قيمة (x) التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{B}=-\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$$

الحل :-

بما أن المطلوب أن يكون المتجهان متعامدين فالزاوية بينهما تساوي ($\frac{\pi}{2}=90^{\circ}$) .

$$\vec{A}.\vec{B}=|A||B|\cos\theta ...(9-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z=0$$

$$(2)(-1)+(3)(-2)+2x=0$$

$$2x=8$$

قيمة (x) التي تجعل المتجهين متعامدين $\boxed{\therefore x=4}$

مسائل عامة

المتجهات (Vectors)

س1 : إذا كان :

$\vec{C}=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ و $\vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$

1- إحسب مقدار كل من المتجهات $\vec{A}$ () و ($\vec{B}$) و ($\vec{C}$) ؟

2- إحسب مقدار $3\vec{A}-2\vec{B}$ ؟

الإجابة: $\boxed{|\vec{A}|=\sqrt{77}units}$ $\boxed{|\vec{B}|=\sqrt{17}units}$ $\boxed{|\vec{C}|=\sqrt{29}units}$ $\boxed{3\vec{A}-2\vec{B}=11\hat{i}-8\hat{j}-24\hat{k}}$

س2 : إذا كانت مركبات المتجهين $\vec{A}$ () و ($\vec{B}$) هي :

$$A_x=3 \ , A_y=1.5 \quad B_x=0.5 \ , B_y=2$$

إحسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الإجابة : $\boxed{\theta=49.45^{\circ}}$

س3 : إذا كان :

$\vec{B}=9\hat{i}+20\hat{j}+12\hat{k}$ و $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

1- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{B}$) ؟

الإجابة : $\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = 0.6\hat{i} - 0.3\hat{j} + 0.6\hat{k}}$ $\boxed{\hat{u}_{\vec{B}} = 0.36\hat{i} - 0.8\hat{j} + 0.48\hat{k}}$

س4 : إذا كان :

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{B} = 4\hat{i} + x\hat{j}$$

أوجد قيمة (x) والتي تجعل المتجهين متعامدين مع بعضهما البعض ؟

الإجابة : $\boxed{x = 8}$

س5 : إذا كان :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

إحسب المتجه $(\vec{C})$ بحيث أن $\vec{A} - \vec{B} + C = 0$ ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{C} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}}$